2013年北约自主招生数学试题

(时间90分钟,满分120分)

一、选择题(每题8分,共48分)

1. 以$\sqrt{2}$和$1-\sqrt[3]{2}$为根的有理系数多项式的项的最高次数为【　　】.

A. 2　　B. 3　　C. 5　　D. 6

2. 有6×6的方阵,3个红车,3个黑车,它们均不在同一行且不在同一列,排列方法种数为【　　】.

A. 720　　B. 20　　C. 518400　　D. 14400

3. 若$x^2=2y+5$,$y^2=2x+5$,($x\neq y$),则$x^3-2x^2y^2+y^3$值为【　　】.

A. -10　　B. -12　　C. -14　　D. 无法确定

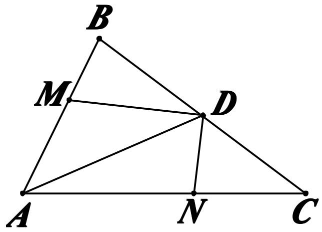
4. 在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$S_{n+1}=4a_n+2$($n\geq 1$),则a_{2013}值为【　　】.

A. 3019×2^{2012}　　B. 3019×2^{2013}　　C. 3018×2^{2012}　　D. 无法确定

5. 在ΔABC中,D为BC中点,DM平分$\angle ADB$交AB于点M,DN平分$\angle ADC$交AC于N,则MN与$BM+CN$的关系为【　　】.

A. $BM+CN>MN$　　B. $MN+CN<MN$

C. $BM+CN=MN$　　D. 无法确定



6. 若模均为1的复数A,B,C满足$A\neq B\neq C$,则$\dfrac{BC+AC+AB}{A+B+C}$=【　　】.

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 无法确定

二、解答题(每题18分,共72分)

7. 最多能找多少个两两不相等的正整数使其任意三个数之和为质数,并证明你的结论.

8. 已知实数$a_1,a_2,\cdots,a_{2013}$满足$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2013}=0$,且$|a_1-2a_2|=|a_2-2a_3|=\cdots=|a_{2013}-2a_1|$,

证明:$a_1=a_2=a_3=\cdots=a_{2013}=0$.

9. 对于任意θ,求$32\cos^6\theta-\cos 6\theta-12\cos 4\theta-15\cos 2\theta$的值.

10. 有一个$m\times n$的数表,已知每一行的数均是由小到大排列.现在将每一列的数由小到大重新排列,则新的数表中每一行的数满足什么样的关系?请证明你的结论.

前三道解答题的答案

1、解：设所求的正整数个数为 n，由题意 $n\geq 3, n\in\mathbf{N}^*$，

当 $n=3$ 时，取 1，5，7，则 $1+5+7=13$ 为素数，满足题意；
当 $n=4$ 时，取 1，5，7，11，则任意三数之和分别为 13，17，19，23，均为素数，满足题意；
当 $n=5$ 时，因为任意三数之和为素数，所以任意三数之和不被 3 整除，假设 5 个数中有 3 个被 3 除的余数相同，则这三个数之和能被 3 整除，不合要求；
再考虑任意三数被 3 除余数不同的情况，这五个数被 3 除的余数只可能是 0，0，1，1，2 或 0，0，1，2，2 或 0，1，1，2，2 三种情况，对于任意一种，分别在被 3 除余数为 0，1，2 的数中选取一个，易知其和也被 3 整除，不合要求；
当 $n>5$时，要么存在三个数被 3 除的余数相同，要么同时存在被 3 除余 0，1，2 的三个数，所以都不合要求.
综上，所求的正整数个数最大值为 4.

2、证明：假设 $|a_1-2a_2|=|a_2-2a_3|=\ldots=|a_{2013}-2a_1|=a\geq 0$，

若 $a>0$，则 a_1-2a_2，$a_2-2a_3,\cdots$，$a_{2013}-2a_1$只能在 $\{a,-a\}$ 中取值，不妨设有 p 个取 a，q 个取 $-a$，其中 $p+q=2013$，$p,q\in\mathbf{N}^*$.

则 $(a_1-2a_2)+(a_2-2a_3)+\cdots+(a_{2013}-2a_1)=-(a_1+a_2+\cdots+a_{2013})=0$，

故 $pa-qa=0$，则 $p=q=\dfrac{2013}{2}\notin\mathbf{N}^*$，矛盾！

故只能 $a=0$，也即 $a_1=2a_2$，$a_2=2a_3,\cdots$，$a_{2013}=2a_1$.

再假设 $a_1\neq 0$，则 $\{a_n\}$为一等比数列，得 $a_{2013}=a_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2012}$，则 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2012}=2$，矛盾！

故只能 $a_1=0$，代入得 $a_1=a_2=\cdots=a_{2013}=0$，这就是所要求证的.

3、解：由降幂公式，$32\cos^6\theta=32\left(\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^3$，

由三倍角公式，$\cos 6\theta=4\cos^3 2\theta-3\cos 2\theta$，

由二倍角公式，$6\cos 4\theta=12\cos^2 2\theta-6$，

将以上三式代入化简，得 $32\cos^6\theta-\cos 6\theta-6\cos 4\theta-15\cos 2\theta=10$.