

2018 年全国高中数学联合竞赛一试试题 (B 卷)

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 设集合 $A = \{2, 0, 1, 8\}$, $B = \{2a \mid a \in A\}$. 则 $A \cup B$ 的所有元素之和是_____.
2. 已知圆锥的顶点为 P , 底面半径长为 2, 高为 l , 在圆锥底面上取一点 Q , 使得直线 PQ 与底面所成角不大于 45° , 则满足条件的点 Q 所构成的这域的面积_____.
3. 将 1, 2, 3, 4, 5, 6 随机排成一行, 记为 a, b, c, d, e, f , 则 $abc + def$ 是奇数数的概率为_____.
4. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 通过原点, $\vec{n} = (3, 1)$ 是 l 的一个法向量, 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意正整数 n , 点 (a_{n+1}, a_n) 均在 l 上. 若 $a_2 = 6$. 则 $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ 的值为_____.
5. 设 α, β 满足 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -3$, $\tan\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right) = 5$ 则 $\tan(\alpha - \beta)$ 的值为_____.
6. 设抛物线 $C: y^2 = 2x$ 的准线与 x 轴交于点 A , 过点 $B(-1, 0)$ 作一直线 l 与抛物线 C 相切于点 K , 过点 A 作 l 的平行线, 与抛物线 C 交于点 M, N , 则 $\triangle KMN$ 的面积为_____.
7. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的以 2 为周期的偶函数, 在区间 $[0, 1]$ 上严格递减, 且满足 $f(\pi) = 1$, $f(2\pi) = 1$, 则不等式组 $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq f(x) \leq 2 \end{cases}$ 的解集为_____.
8. 已知复数 z_1, z_2, z_3 满足 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $|z_1 + z_2 + z_3| = 1$. 其中 r 是给定实数, 则 $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}$ 的实部是_____. (用含有 r 的式子表示).

二、解答题：本大题共 3 小题. 满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9. (本题满分 16 分) 已知数列 $\{a_n\}$: $a_1 = 7$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_n + 2, n = 1, 2, 3, \dots$, 2 求满足 $a_n > 4^{2018}$ 的最小正整数 n .
10. (本题满分 20 分) 已知定义在 R^+ 上的函数 $f(x)$ 为

$$f(x) = \begin{cases} |\log_3 x - 1|, & 0 < x < 9 \\ 4 - \sqrt{x}, & x > 9 \end{cases}$$

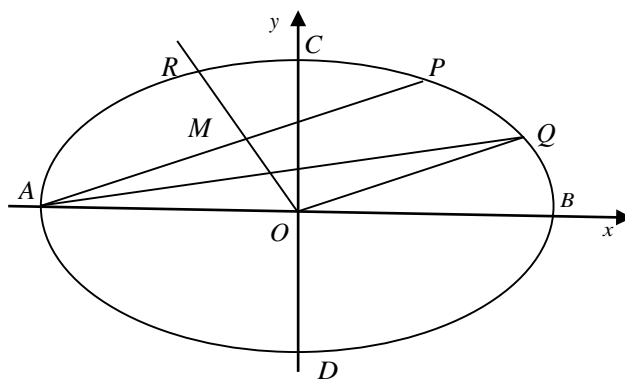
设 a, b, c 是三个互不相同的实数, 满足 $f(a) = f(b) = f(c)$, 求 abc 的取值范围.

11. (本题满分 20 分) 如图所示, 在平面直角坐标系 xOy 中, A, B 与 C, D 分别是椭圆

$\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点与上、下顶点, 设 P, Q 是 Γ 上且位于第一象限的两点,

满足 $OQ \parallel AP$, M 是线段 AP 的中点, 射线 OM 与椭圆交于点 R .

证明: 线段 OQ, OR, BC 能构成一个直角三角形.



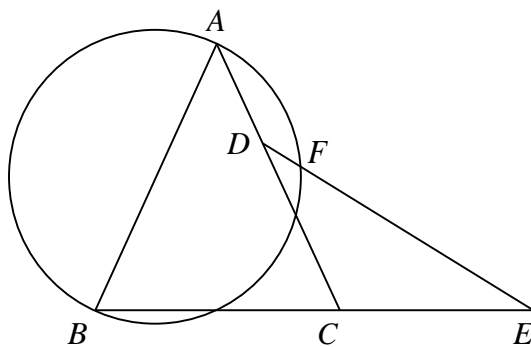
2018 年全国高中数学联合竞赛加试试题 (B 卷)

一、(本题满分 40 分) 设 a, b 是实数, 函数 $f(x) = ax + b + \frac{9}{x}$.

证明: 存在 $x_0 \in [1, 9]$, 使得 $|f(x_0)| \geq 2$

二、(本题满分 40 分) 如图所示, 在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 边 AC 的上一内点 D 及 BC 延长线上一点 E 分满足 $\frac{AD}{DC} = \frac{BC}{2CE}$, 以 AB 为直径的圆 ω 与线段 DE 交于一点 F .

证明: B, C, F, D 四点共圆 (答题时请将图画在答卷纸上)



三、(本题满分 50 分) 设集合 $A = \{1, 2, \dots, n\}$, X, Y 均为 A 的非空子集 (允许 $X = Y$). X 中的最大元与 Y 中的最小元分别记为 $\max X, \min Y$ 求满足 $\max X > \min Y$ 的有序集合对 (X, Y) 的数目.

四、(本题满分 50 分) 给定整数 $a \geq 2$. 证明: 对任意正整数 n , 存在正整数 k , 使得连续 n 个数 $a^k + 1, a^k + 2, \dots, a^k + n$ 均是合数.

2018年全国高中数学联合竞赛一试(B卷)

参考答案及评分标准

说明:

1. 评阅试卷时, 请依据本评分标准. 填空题只设8分和0分两档; 其他各题的评阅, 请严格按照本评分标准的评分档次给分, 不得增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同, 只要思路合理、步骤正确, 在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分, 解答题中第9小题4分为一个档次, 第10、11小题5分为一个档次, 不得增加其他中间档次.

一、填空题: 本大题共8小题, 每小题8分, 满分64分.

1. 设集合 $A = \{2, 0, 1, 8\}$, $B = \{2a \mid a \in A\}$, 则 $A \cup B$ 的所有元素之和是_____.

答案: 31.

解: 易知 $B = \{4, 0, 2, 16\}$, 故 $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 8, 16\}$. $A \cup B$ 的所有元素之和是 $0+1+2+4+8+16=31$.

2. 已知圆锥的顶点为 P , 底面半径长为2, 高为1. 在圆锥底面上取一点 Q , 使得直线 PQ 与底面所成角不大于 45° , 则满足条件的点 Q 所构成的区域的面积为_____.

答案: 3π .

解: 圆锥顶点 P 在底面上的投影即为底面中心, 记之为 O . 由条件知, $\frac{OP}{OQ} = \tan \angle OQP \leq 1$, 即 $OQ \geq 1$, 故所求的区域面积为 $\pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2 = 3\pi$.

3. 将1, 2, 3, 4, 5, 6随机排成一行, 记为 a, b, c, d, e, f , 则 $abc + def$ 是奇数的概率为_____.

答案: $\frac{1}{10}$.

解: 当 $abc + def$ 为奇数时, abc, def 必为一奇一偶, 若 abc 为奇数, 则 a, b, c 为1, 3, 5的排列, d, e, f 为2, 4, 6的排列, 这样有 $3! \times 3! = 36$ 种情况. 由对称性可知, 满足条件的情况数为 $36 \times 2 = 72$ 种. 从而所求概率为 $\frac{72}{6!} = \frac{72}{720} = \frac{1}{10}$.

4. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 通过原点, $n = (3, 1)$ 是 l 的一个法向量. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意正整数 n , 点 (a_{n+1}, a_n) 均在 l 上. 若 $a_2 = 6$, 则 $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ 的值为_____.

答案: -32.

解: 易知直线 l 的方程是 $3x + y = 0$. 因此对任意正整数 n , 有 $3a_{n+1} + a_n = 0$, 即 $a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n$, 故 $\{a_n\}$ 是以 $-\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列. 于是 $a_3 = -\frac{1}{3}a_2 = -2$. 由等比数列的性质可得, $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = a_3^5 = (-2)^5 = -32$.

5. 设 α, β 满足 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -3$, $\tan\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right) = 5$, 则 $\tan(\alpha - \beta)$ 的值为_____.

答案: $-\frac{7}{4}$.

解: 由两角差的正切公式可知 $\tan\left(\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{-3-5}{1+(-3)\times 5}=\frac{4}{7}$, 即 $\tan\left(\alpha-\beta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{7}$, 从而 $\tan(\alpha-\beta)=-\cot\left(\alpha-\beta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{7}{4}$.

6. 设抛物线 $C: y^2=2x$ 的准线与 x 轴交于点 A , 过点 $B(-1,0)$ 作一直线 l 与抛物线 C 相切于点 K , 过点 A 作 l 的平行线, 与抛物线 C 交于点 M, N , 则 $\triangle KMN$ 的面积为_____.

答案: $\frac{1}{2}$.

解: 设直线 l 与 MN 的斜率为 k , 则 $l: x=\frac{1}{k}y-1$, $MN: x=\frac{1}{k}y-\frac{1}{2}$.

将 l 与 C 联立, 得方程 $y^2-\frac{2}{k}y+2=0$, 由条件知其判别式为零, 故 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

将 MN 与 C 联立, 得方程 $y^2-\frac{2}{k}y+1=0$, 于是

$$|y_M - y_N| = \sqrt{(y_M + y_N)^2 - 4y_M y_N} = \sqrt{\frac{4}{k^2} - 4} = 2,$$

结合 l 与 MN 平行, 可知

$$S_{\triangle KMN} = S_{\triangle BMN} = |S_{\triangle BAM} - S_{\triangle BAN}| = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |y_M - y_N| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2}.$$

7. 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的以 2 为周期的偶函数, 在区间 $[1, 2]$ 上严格递减, 且满足 $f(\pi)=1, f(2\pi)=0$, 则不等式组 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq f(x) \leq 1 \end{cases}$ 的解集为_____.

答案: $[2\pi-6, 4-\pi]$.

解: 由 $f(x)$ 为偶函数及在 $[1, 2]$ 上严格递减知, $f(x)$ 在 $[-2, -1]$ 上严格递增, 再结合 $f(x)$ 以 2 为周期可知, $[0, 1]$ 是 $f(x)$ 的严格递增区间.

注意到

$$f(4-\pi) = f(\pi-4) = f(\pi) = 1, f(2\pi-6) = f(2\pi) = 0,$$

所以

$$0 \leq f(x) \leq 1 \Leftrightarrow f(2\pi-6) \leq f(x) \leq f(4-\pi),$$

而 $0 < 2\pi-6 < 4-\pi < 1$, 故原不等式组成立当且仅当 $x \in [2\pi-6, 4-\pi]$.

8. 已知复数 z_1, z_2, z_3 满足 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1, |z_1+z_2+z_3|=r$, 其中 r 是给定实数, 则 $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}$ 的实部是_____ (用含有 r 的式子表示).

答案: $\frac{r^2-3}{2}$.

解: 记 $w = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}$. 由复数模的性质可知

$$\overline{z_1} = \frac{1}{z_1}, \quad \overline{z_2} = \frac{1}{z_2}, \quad \overline{z_3} = \frac{1}{z_3},$$

因此 $w = \overline{z_1 z_2} + \overline{z_2 z_3} + \overline{z_3 z_1}$. 于是

$$r^2 = (z_1 + z_2 + z_3)(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + w + \overline{w} = 3 + 2\operatorname{Re} w,$$

解得 $\operatorname{Re} w = \frac{r^2 - 3}{2}$.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

9. (本题满分 16 分) 已知数列 $\{a_n\}$: $a_1 = 7$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_n + 2, n = 1, 2, 3, \dots$. 求满足 $a_n > 4^{2018}$ 的最小正整数 n .

解：由 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_n + 2$ 可知 $a_{n+1} + 1 = (a_n + 1)^2$. 因此

$$a_n + 1 - (a_1 + 1)^{2^{n-1}} = 8^{2^{n-1}} - 2^{3 \times 2^{n-1}},$$

故 $a_n = 2^{3 \times 2^{n-1}} - 1$8 分

显然 $\{a_n\}$ 单调递增. 由于

$$a_{11} = 2^{3072} - 1 < 2^{4036} = 4^{2018}, \quad a_{12} = 2^{6144} - 1 > 2^{4036} = 4^{2018},$$

故满足题目条件的 n 的最小值是 12.16 分

10. (本题满分 20 分) 已知定义在 \mathbf{R}^+ 上的函数 $f(x)$ 为

$$f(x) = \begin{cases} |\log_3 x - 1|, & 0 < x \leq 9, \\ 4 - \sqrt{x}, & x > 9. \end{cases}$$

设 a, b, c 是三个互不相同的实数, 满足 $f(a) = f(b) = f(c)$, 求 abc 的取值范围.

解：不妨设 $a < b < c$. 由于 $f(x)$ 在 $(0, 3]$ 上严格递减, 在 $[3, 9]$ 上严格递增, 在 $[9, +\infty)$ 上严格递减, 且 $f(3) = 0, f(9) = 1$, 故结合图像可知

$$a \in (0, 3), \quad b \in (3, 9), \quad c \in (9, +\infty),$$

并且 $f(a) = f(b) = f(c) \in (0, 1)$5 分

由 $f(a) = f(b)$ 得

$$1 - \log_3 a = \log_3 b - 1,$$

即 $\log_3 a + \log_3 b = 2$, 因此 $ab = 3^2 = 9$. 于是 $abc = 9c$10 分

又 $0 < f(c) = 4 - \sqrt{c} < 1$,15 分

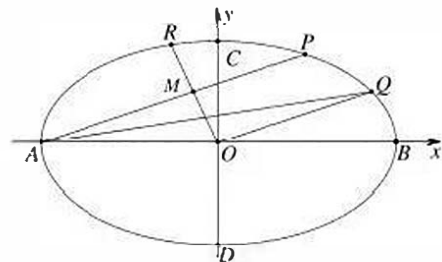
故 $c \in (9, 16)$. 进而 $abc = 9c \in (81, 144)$.

所以, abc 的取值范围是 $(81, 144)$20 分

注：对任意的 $r \in (81, 144)$, 取 $c_0 = \frac{r}{9}$, 则 $c_0 \in (9, 16)$, 从而 $f(c_0) \in (0, 1)$. 过

点 $(c_0, f(c_0))$ 作平行于 x 轴的直线 l , 则 l 与 $f(x)$ 的图像另有两个交点 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ (其中 $a \in (0, 3)$, $b \in (3, 9)$), 满足 $f(a) = f(b) = f(c)$, 并且 $ab = 9$, 从而 $abc = r$.

11. (本题满分 20 分) 如图所示, 在平面直角坐标系 xOy 中, A 、 B 与 C 、 D 分别是椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点与上、下顶点. 设 P, Q 是 Γ 上且位于第一象限的两点, 满足 $OQ \parallel AP$, M 是线段 AP 的中点, 射线 OM 与椭圆交于点 R .



证明: 线段 OQ, OR, BC 能构成一个直角三角形.

证明: 设点 P 坐标为 (x_0, y_0) . 由于 $\overline{OQ} \parallel \overline{AP}$, $\overline{AP} = \overline{OP} - \overline{OA}$; $\overline{OR} \parallel \overline{OM}$, $\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OP} + \overline{OA})$, 故存在实数 λ, μ , 使得

$$\overline{OQ} = \lambda(\overline{OP} - \overline{OA}), \quad \overline{OR} = \mu(\overline{OP} + \overline{OA}). \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

此时点 Q, R 的坐标可分别表示是 $(\lambda(x_0 + a), \lambda y_0)$, $(\mu(x_0 - a), \mu y_0)$. 由于点 Q, R 都在椭圆上, 所以

$$\lambda^2 \left(\frac{(x_0 + a)^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \right) = \mu^2 \left(\frac{(x_0 - a)^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \right) = 1.$$

结合 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ 知, 上式可化为 $\lambda^2 \left(2 + \frac{2x_0}{a} \right) = \mu^2 \left(2 - \frac{2x_0}{a} \right) = 1$, 解得

$$\lambda^2 = \frac{a}{2(a + x_0)}, \quad \mu^2 = \frac{a}{2(a - x_0)}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

因此

$$\begin{aligned} |OQ|^2 + |OR|^2 &= \lambda^2((x_0 + a)^2 + y_0^2) + \mu^2((x_0 - a)^2 + y_0^2) \\ &= \frac{a}{2(a + x_0)}((x_0 + a)^2 + y_0^2) + \frac{a}{2(a - x_0)}((x_0 - a)^2 + y_0^2) \\ &= \frac{a(a + x_0)}{2} + \frac{ay_0^2}{2(a + x_0)} + \frac{a(a - x_0)}{2} + \frac{ay_0^2}{2(a - x_0)} \\ &= a^2 + \frac{ay_0^2}{2} \left(\frac{1}{a + x_0} + \frac{1}{a - x_0} \right) = a^2 + \frac{ay_0^2}{2} \cdot \frac{2a}{a^2 - x_0^2} \\ &= a^2 + \frac{a^2 \cdot b^2 \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2} \right)}{a^2 - x_0^2} = a^2 + b^2 = |BC|^2. \end{aligned}$$

从而线段 OQ, OR, BC 能构成一个直角三角形. 20 分

2018 年全国高中数学联合竞赛加试 (B 卷)

参考答案及评分标准

说明:

1. 评阅试卷时, 请严格按照本评分标准的评分档次给分.
2. 如果考生的解答方法和本解答不同, 只要思路合理、步骤正确, 在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分, 10 分为一个档次, 不得增加其他中间档次.

一、(本题满分 40 分) 设 a, b 是实数, 函数 $f(x) = ax + b + \frac{9}{x}$.

证明: 存在 $x_0 \in [1, 9]$, 使得 $|f(x_0)| \geq 2$.

证法 1: 只需证明存在 $u, v \in [1, 9]$, 满足 $|f(u) - f(v)| \geq 4$, 进而由绝对值不等式得

$$|f(u)| + |f(v)| \geq |f(u) - f(v)| \geq 4,$$

故 $|f(u)| \geq 2$ 与 $|f(v)| \geq 2$ 中至少有一个成立.10 分

当 $a \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 时, 有

$$|f(1) - f(9)| = |(a + b + 9) - (9a + b + 1)| = 8|1 - a| \geq 4. \quad \text{.....20 分}$$

当 $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$ 时, 有 $\frac{3}{\sqrt{a}} \in [1, 9]$. 再分两种情况: 若 $\frac{1}{2} < a \leq 1$, 则

$$\left|f(1) - f\left(\frac{3}{\sqrt{a}}\right)\right| = |(a + b + 9) - (6\sqrt{a} + b)| = (3 - \sqrt{a})^2 \geq 4. \quad \text{.....30 分}$$

若 $1 < a < \frac{3}{2}$, 则

$$\left|f(9) - f\left(\frac{3}{\sqrt{a}}\right)\right| = |(9a + b + 1) - (6\sqrt{a} + b)| = (3\sqrt{a} - 1)^2 \geq 4.$$

综上所述, 存在 $u, v \in [1, 9]$, 满足 $|f(u) - f(v)| \geq 4$, 从而命题得证.

.....40 分

证法 2: 用反证法. 假设对任意 $x \in [1, 9]$, 均有 $|f(x)| < 2$, 则

$$|f(1)| < 2, |f(3)| < 2, |f(9)| < 2. \quad \text{.....10 分}$$

易知

$$f(1) = a + b + 9, \quad \text{①}$$

$$f(3) = 3a + b + 3, \quad \text{②}$$

$$f(9) = 9a + b + 1. \quad \text{③}$$

由①, ②得, $2a - 6 = f(2) - f(1)$; 又由②, ③得, $6a - 2 = f(3) - f(2)$.

由上述两式消去 a , 可知

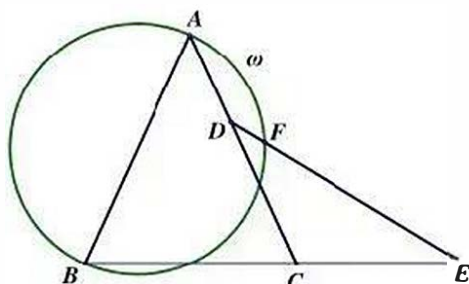
$$f(3) - 4f(2) + 3f(1) = (6a - 2) - 3 \cdot (2a - 6) = 16. \quad \text{.....30 分}$$

但 $f(3) - 4f(2) + 3f(1) < 2 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 16$, 矛盾! 从而命题得证.

.....40 分

二、(本题满分 40 分) 如图所示, 在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 边 AC 上一点 D 及 BC 延长线上一点 E 满足 $\frac{AD}{DC} = \frac{BC}{2CE}$, 以 AB 为直径的圆 ω 与线段 DE 交于一点 F .

证明: B, C, F, D 四点共圆. (答题时请将图画在答卷纸上)

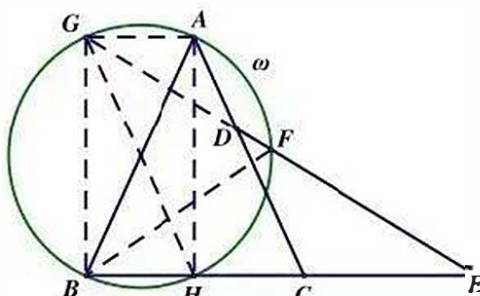


证明: 取 BC 中点 H , 则由 $AB = AC$ 知 $AH \perp BC$, 故 H 在圆 ω 上.

延长 FD 至 G , 使得 $AG \parallel BC$, 结合已知条件得, $\frac{AG}{CE} = \frac{AD}{DC} = \frac{BC}{2CE}$, 故

$$AG = \frac{1}{2}BC = BH = HC,$$

从而 $AGBH$ 为矩形, $AGHC$ 为平行四边形.20 分



由 $AGBH$ 为矩形知, G 亦在圆 ω 上. 故 $\angle HGF = \angle HBF$.

又 $AGHC$ 为平行四边形, 由 $AC \parallel GH$, 得 $\angle CDF = \angle HGF$.

所以 $\angle CDF = \angle HBF = \angle CBF$, 故 B, C, F, D 四点共圆.40 分

三、(本题满分 50 分) 设集合 $A = \{1, 2, \dots, n\}$, X, Y 均为 A 的非空子集 (允许 $X = Y$). X 中的最大元与 Y 中的最小元分别记为 $\max X, \min Y$. 求满足 $\max X > \min Y$ 的有序集合对 (X, Y) 的数目.

解: 先计算满足 $\max X \leq \min Y$ 的有序集合对 (X, Y) 的数目. 对给定的 $m = \max X$, 集合 X 是集合 $\{1, 2, \dots, m-1\}$ 的任意一个子集与 $\{m\}$ 的并, 故共有 2^{m-1} 种取法. 又 $\min Y \geq m$, 故 Y 是 $\{m, m+1, \dots, n\}$ 的任意一个非空子集, 共有 $2^{n+1-m} - 1$ 种取法.20 分

$$\sum_{m=1}^n 2^{m-1}(2^{n+1-m} - 1) = \sum_{m=1}^n 2^n - \sum_{m=1}^n 2^{m-1} = n \cdot 2^n - 2^n + 1.$$

.....40分

由于有序集合对 (X, Y) 有 $(2^n - 1) \cdot (2^n - 1) = (2^n - 1)^2$ 个, 于是满足 $\max X > \min Y$ 的有序集合对 (X, Y) 的数目是

$$(2^n - 1)^2 - n \cdot 2^n + 2^n - 1 = 2^{2n} - 2^n(n + 1). \quad \text{.....50分}$$

四、(本题满分 50 分) 给定整数 $a \geq 2$. 证明: 对任意正整数 n , 存在正整数 k , 使得连续 n 个数 $a^k + 1, a^k + 2, \dots, a^k + n$ 均是合数.

证明: 设 $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ 是 $1, 2, \dots, n$ 中与 a 互素的全体整数, 则对 $1 \leq i \leq n$, $i \notin \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$, 无论正整数 k 如何取值, $a^k + i$ 均与 a 不互素且大于 a , 故 $a^k + i$ 为合数.10分

对任意 $j = 1, 2, \dots, r$, 因 $a + i_j > 1$, 故 $a + i_j$ 有素因子 p_j .

我们有 $(p_j, a) = 1$ (否则, 因 p_j 是素数, 故 $p_j | a$, 但 $p_j | a + i_j$, 从而 $p_j | i_j$, 故 a, i_j 不互素, 与 i_j 的取法矛盾). 因此, 由费马小定理知,

$$a^{p_j-1} \equiv 1 \pmod{p_j}.$$

现取 $k = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_r - 1) + 1$30分

对任意 $j = 1, 2, \dots, r$, 注意到 $k \equiv 1 \pmod{p_j - 1}$, 故有

$$a^k + i_j \equiv a + i_j \equiv 0 \pmod{p_j}$$

又 $a^k + i_j > a + i_j \geq p_j$, 故 $a^k + i_j$ 为合数.

综上所述, 当 $k = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_r - 1) + 1$ 时, $a^k + 1, a^k + 2, \dots, a^k + n$ 均是合数.50分