2017年全国高中数学联赛A卷

一试

一、填空题

1.设 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数，对任意实数 x 有 $f(x+3)\cdot f(x-4)=-1$.又当 $0\le x<7$ 时， $f(x)=\log_2(9-x)$，则 $f(-100)$ 的值为_________.

2.若实数 x,y 满足 $x^2+2\cos y=1$，则 $x-\cos y$ 的取值范围是_________.

3.在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 的方程为: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{10}=1$，$F$ 为 C 的上焦点，A 为 C 的右顶点，P 是 C 上位于第一象限内的动点，则四边形 $OAPF$ 的面积的最大值为_________.

4.若一个三位数中任意两个相邻数码的差不超过 1，则称其为“平稳数”.平稳数的个数是

5.正三棱锥 $P-ABC$ 中， $AB=1$， $AP=2$，过 AB 的平面 α 将其体积平分，则棱 PC 与平面 α 所成角的余弦值为_________.

6.在平面直角坐标系 xOy 中，点集 $K=\{(x,y)|x,y=-1,0,1\}$.在 K 中随机取出三个点，则这三点中存在两点之间距离为 $\sqrt{5}$ 的概率为_________.

7.在 ΔABC 中， M 是边 BC 的中点， N 是线段 BM 的中点.若 $\angle A=\dfrac{\pi}{3}$， ΔABC 的面积为 $\sqrt{3}$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 的最小值为_________.

8.设两个严格递增的正整数数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足： $a_{10}=b_{10}<2017$，对任意正整数 n，有 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$， $b_{n+1}=2b_n$，则 a_1+b_1 的所有可能值为_________.

二、解答题

9.设 k,m 为实数，不等式 $\left|x^2-kx-m\right|\le 1$ 对所有 $x\in[a,b]$ 成立.证明： $b-a\le 2\sqrt{2}$.

10.设 x_1,x_2,x_3 是非负实数，满足 $x_1+x_2+x_3=1$，求 $(x_1+3x_2+5x_3)(x_1+\dfrac{x_2}{3}+\dfrac{x_3}{5})$ 的最小值和最大值.

11.设复数 z_1,z_2 满足 $\mathrm{Re}(z_1)>0$，$\mathrm{Re}(z_2)>0$，且 $\mathrm{Re}(z_1^2)=\mathrm{Re}(z_2^2)=2$（其中 $\mathrm{Re}(z)$ 表示复数 z 的实部）.

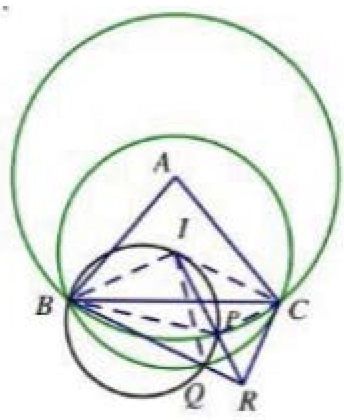
（1）求 $\mathrm{Re}(z_1z_2)$ 的最小值；

（2）求 $\left|z_1+2\right|+\left|\overline{z_2}+2\right|-\left|\overline{z_1}-z_2\right|$ 的最小值.

2017 年全国高中数学联赛 A 卷

二试

一.如图，在 ΔABC 中，$AB=AC$，I 为 ΔABC 的内心，以 A 为圆心，AB 为半径作圆 Γ_1，以 I 为圆心，IB 为半径作圆 Γ_2，过点 B,I 的圆 Γ_3 与 Γ_1,Γ_2 分别交于点 P,Q（不同于点 B）.设 IP 与 BQ 交于点 R.证明：$BR\perp CR$



二.设数列 $\{a_n\}$ 定义为 $a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+n, a_n\le n,\\ a_n-n, a_n>n,\end{cases}$ $n=1,2,\cdots$.求满足 $a_r<r\le 3^{2017}$ 的正整数 r 的个数.

三.将 33×33 方格纸中每个小方格染三种颜色之一，使得每种颜色的小方格的个数相等.若相邻连个小方格的颜色不同，则称它们的公共边为“分隔边”.试求分隔边条数的最小值.

四.设 m,n 均是大于 1 的整数，$m\ge n$，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个不超过 m 的互不相同的正整数，且 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互素.证明：对任意实数 x，均存在一个 $i(1\le i\le n)$，使得 $\|a_ix\|\ge \dfrac{2}{m(m+1)}\|x\|$，这里 $\|y\|$ 表示实数 y 到与它最近的整数的距离.

2017 年全国高中数学联赛 A 卷

一试答案

1.

答案：$-\frac{1}{2}$.

解：由条件知，$f(x+14)=-\frac{1}{f(x+7)}=f(x)$，所以

$$f(-100)=f(-100+14\times7)=f(-2)=-\frac{1}{f(5)}=-\frac{1}{\log_2 4}=-\frac{1}{2}.$$

2.

答案：$[-1,\ \sqrt{3}+1]$.

解：由于 $x^2=1-2\cos y\in[-1,\ 3]$，故 $x\in[-\sqrt{3},\ \sqrt{3}]$.

由 $\cos y=\frac{1-x^2}{2}$ 可知，$x-\cos y=x-\frac{1-x^2}{2}=\frac{1}{2}(x+1)^2-1$. 因此当 $x=-1$ 时，$x-\cos y$ 有最小值 -1（这时 y 可以取 $\frac{\pi}{2}$）；当 $x=\sqrt{3}$ 时，$x-\cos y$ 有最大值 $\sqrt{3}+1$（这时 y 可以取 π）. 由于 $\frac{1}{2}(x+1)^2-1$ 的值域是 $[-1,\ \sqrt{3}+1]$，从而 $x-\cos y$ 的取值范围是 $[-1,\ \sqrt{3}+1]$.

3.

答案：$\frac{3\sqrt{11}}{2}$.

解：易知 $A(3,\ 0),\ F(0,\ 1)$. 设 P 的坐标是 $(3\cos\theta,\ \sqrt{10}\sin\theta),\ \theta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，则

$$S_{OAPF}=S_{\Delta OAP}+S_{\Delta OFP}=\frac{1}{2}\cdot3\cdot\sqrt{10}\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot1\cdot3\cos\theta$$
$$=\frac{3}{2}(\sqrt{10}\cos\theta+\sin\theta)=\frac{3\sqrt{11}}{2}\sin(\theta+\varphi).$$

其中 $\varphi=\arctan\frac{\sqrt{10}}{10}$. 当 $\theta=\arctan\sqrt{10}$ 时，四边形 $OAPF$ 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{11}}{2}$.

4.

答案：75.

解：考虑平稳数 $\overline{abc}$.

若 $b=0$，则 $a=1,\ c\in\{0,1\}$，有 2 个平稳数.

若 $b=1$，则 $a\in\{1,2\},\ c\in\{0,1,2\}$，有 $2\times3=6$ 个平稳数.

若 $2\le b\le8$，则 $a,c\in\{b-1,b,\ b+1\}$，有 $7\times3\times3=63$ 个平稳数.

若 $b=9$，则 $a,c\in\{8,9\}$，有 $2\times2=4$ 个平稳数.

综上可知，平稳数的个数是 $2+6+63+4=75$.

5.

答案：$\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$．

解：设 $AB,\ PC$ 的中点分别为 $K,\ M$，则易证平面 ABM 就是平面 α．由中线长公式知

$$AM^2=\frac{1}{2}(AP^2+AC^2)-\frac{1}{4}PC^2=\frac{1}{2}(2^2+1^2)-\frac{1}{4}\times 2^2=\frac{3}{2},$$

所以 $KM=\sqrt{AM^2-AK^2}=\sqrt{\dfrac{3}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

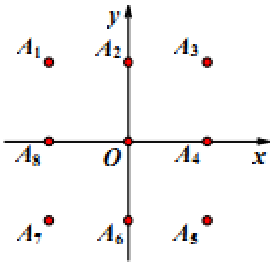
又易知直线 PC 在平面 α 上的射影是直线 MK，而 $CM=1,\ KC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以

$$\cos\angle KMC=\frac{KM^2+MC^2-KC^2}{2KM\cdot MC}=\frac{\frac{5}{4}+1-\frac{3}{4}}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{10},$$

故棱 PC 与平面 α 所成角的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$．

6.

答案：$\dfrac{4}{7}$．



解：易知 K 中有 9 个点，故在 K 中随机取出三个点的方式数为 $C_9^3=84$ 种．

将 K 中的点按右图标记为 $A_1, A_2, \cdots, A_8, O$，其中有 8 对点之间的距离为 $\sqrt{5}$．由对称性，考虑取 A_1, A_4 两点的情况，则剩下的一个点有 7 种取法，这样有 $7\times 8=56$ 个三点组（不计每组中三点的次序）．对每个 $A_i(i=1,2,\cdots,8)$，K 中恰有 A_{i+3}, A_{i+5} 两点与之距离为 $\sqrt{5}$（这里下标按模 8 理解），因而恰有 $\{A_i, A_{i+3}, A_{i+5}\}(i=1,2,\cdots,8)$ 这 8 个三点组被计了两次．从而满足条件的三点组个数为 $56-8=48$，进而所求概率为 $\dfrac{48}{84}=\dfrac{4}{7}$．

7.

答案：$\sqrt{3}+1$.

解：由条件知，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，$\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，故

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{8}\left(3\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right).$$

由于$\sqrt{3}=S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|$，所以$\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|=4$，进一步可得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos A=2$，从而

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}\geq\frac{1}{8}\left(2\sqrt{3\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|^2}+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}+1.$$

当$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$，$\left|\overrightarrow{AC}\right|=2\times\sqrt[4]{3}$时，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$的最小值为$\sqrt{3}+1$.

8.

答案：13, 20 .

解：由条件可知：a_1, a_2, b_1均为正整数，且$a_1<a_2$.

由于$2017>b_{10}=2^9\cdot b_1=512b_1$，故$b_1\in\{1,2,3\}$．反复运用$\{a_n\}$的递推关系知

$$a_{10}=a_9+a_8=2a_8+a_7=3a_7+2a_6=5a_6+3a_5=8a_5+5a_4$$
$$=13a_4+8a_3=21a_3+13a_2=34a_2+21a_1,$$

因此 $$21a_1\equiv a_{10}=b_{10}=512b_1\equiv 2b_1 \pmod{34},$$

而$13\times21=34\times8+1$，故有

$$a_1\equiv13\times21a_1\equiv13\times2b_1=26b_1 \pmod{34}. \quad ①$$

另一方面，注意到$a_1<a_2$，有$55a_1<34a_2+21a_1=512b_1$，故

$$a_1<\frac{512}{55}b_1. \quad ②$$

当$b_1=1$时，①，②分别化为$a_1\equiv26 \pmod{34}$, $a_1<\frac{512}{55}$，无解.

当$b_1=2$时，①，②分别化为$a_1\equiv52 \pmod{34}$, $a_1<\frac{1024}{55}$，得到唯一的正整数$a_1=18$，此时$a_1+b_1=20$.

当$b_1=3$时，①，②分别化为$a_1\equiv78 \pmod{34}$, $a_1<\frac{1536}{55}$，得到唯一的正整数$a_1=10$，此时$a_1+b_1=13$.

综上所述，a_1+b_1的所有可能值为13, 20 .

9.

证明：令 $f(x)=x^2-kx-m$， $x\in[a,\ b]$，则 $f(x)\in[-1,\ 1]$．于是

$$f(a)=a^2-ka-m\le 1, \qquad ①$$

$$f(b)=b^2-kb-m\le 1, \qquad ②$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-k\cdot\frac{a+b}{2}-m\ge -1. \qquad ③$$

…………………4 分

由①＋②$-2\times$③知，

$$\frac{(a-b)^2}{2}=f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le 4,$$

故 $b-a\le 2\sqrt{2}$． …………………16 分

10.

解：由柯西不等式

$$(x_1+3x_2+5x_3)(x_1+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{5})\ge(\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_1}+\sqrt{3x_2}\cdot\sqrt{\frac{x_2}{3}}+\sqrt{5x_3}\cdot\sqrt{\frac{x_3}{5}})^2$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2=1,$$

当 $x_1=1,\ x_2=0,\ x_3=0$ 时不等式等号成立，故欲求的最小值为 1．

…………………5 分

因为

$$(x_1+3x_2+5x_3)(x_1+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{5})=\frac{1}{5}(x_1+3x_2+5x_3)(5x_1+\frac{5x_2}{3}+x_3)$$

$$\le\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\left((x_1+3x_2+5x_3)+(5x_1+\frac{5x_2}{3}+x_3)\right)^2$$

$$=\frac{1}{20}\left(6x_1+\frac{14}{3}x_2+6x_3\right)^2 \qquad …………………10 分$$

$$\le\frac{1}{20}\left(6x_1+6x_2+6x_3\right)^2=\frac{9}{5},$$

当 $x_1=\frac{1}{2},x_2=0,x_3=\frac{1}{2}$ 时不等式等号成立，故欲求的最大值为 $\frac{9}{5}$． ………20 分

11.

解：(1) 对 $k=1,2$，设 $z_k=x_k+y_k\mathrm{i}(x_k,y_k\in\mathbf{R})$．由条件知

$$x_k=\mathrm{Re}(z_k)>0,\ x_k^2-y_k^2=\mathrm{Re}(z_k^2)=2.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z_1z_2)&=\mathrm{Re}((x_1+y_1\mathrm{i})(x_2+y_2\mathrm{i}))=x_1x_2-y_1y_2\\&=\sqrt{(y_1^2+2)(y_2^2+2)}-y_1y_2\ge(|y_1y_2|+2)-y_1y_2\ge 2.\end{aligned}$$

又当 $z_1=z_2=\sqrt{2}$ 时，$\mathrm{Re}(z_1z_2)=2$．这表明，$\mathrm{Re}(z_1z_2)$ 的最小值为 2．

………………5 分

(2) 对 $k=1,2$，将 z_k 对应到平面直角坐标系 xOy 中的点 $P_k(x_k,y_k)$，记 P_2' 是 P_2 关于 x 轴的对称点，则 P_1,P_2' 均位于双曲线 $C:x^2-y^2=2$ 的右支上．

设 F_1,F_2 分别是 C 的左、右焦点，易知 $F_1(-2,0),\ F_2(2,0)$．

根据双曲线的定义，有 $|P_1F_1|=|P_1F_2|+2\sqrt{2},\ |P_2'F_1|=|P_2'F_2|+2\sqrt{2}$，进而得

$$\begin{aligned}&|z_1+2|+|\overline{z_2}+2|-|\overline{z_1}-z_2|=|z_1+2|+|\overline{z_2}+2|-|z_1-\overline{z_2}|\\&=|P_1F_1|+|P_2'F_1|-|P_1P_2'|=4\sqrt{2}+|P_1F_2|+|P_2'F_2|-|P_1P_2'|\ge 4\sqrt{2},\end{aligned}$$

………………15 分

等号成立当且仅当 F_2 位于线段 P_1P_2' 上（例如，当 $z_1=z_2=2+\sqrt{2}\mathrm{i}$ 时，F_2 恰是 P_1P_2' 的中点）．

综上可知，$|z_1+2|+|\overline{z_2}+2|-|\overline{z_1}-z_2|$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$．　　…………20 分

2017 年全国高中数学联赛 A 卷

二试答案

一．

证明：连接IB，IC，IQ，PB，PC．

由于点Q在圆Γ_2上，故$IB=IQ$，所以$\angle IBQ=\angle IQB$．

又B，I，P，Q四点共圆，所以$\angle IQB=\angle IPB$，于是$\angle IBQ=\angle IPB$，故$\Delta IBP\backsim\Delta IRB$，从而有$\angle IRB=\angle IBP$，且

$$\frac{IB}{IR}=\frac{IP}{IB}.$$

……………………10 分

注意到$AB=AC$，且I为ΔABC的内心，故$IB=IC$，所以

$$\frac{IC}{IR}=\frac{IP}{IC},$$

于是$\Delta ICP\backsim\Delta IRC$，故$\angle IRC=\angle ICP$．　……………………20 分

又点P在圆Γ_1的弧BC上，故$\angle BPC=180^\circ-\frac{1}{2}\angle A$，因此

$$\begin{aligned}\angle BRC&=\angle IRB+\angle IRC=\angle IBP+\angle ICP\\&=360^\circ-\angle BIC-\angle BPC\\&=360^\circ-\left(90^\circ+\frac{1}{2}\angle A\right)-\left(180^\circ-\frac{1}{2}\angle A\right)\\&=90^\circ,\end{aligned}$$

故$BR\perp CR$．　……………………40 分

二.

解：由数列的定义可知$a_1=1,a_2=2$．假设对某个整数$r\ge 2$有$a_r=r$，我们证明对$t=1,\cdots,r-1$，有

$$a_{r+2t-1}=2r+t-1>r+2t-1,\quad a_{r+2t}=r-t<r+2t.\qquad ①$$

对t归纳证明.

当$t=1$时，由于$a_r=r\ge r$，由定义，$a_{r+1}=a_r+r=r+r=2r>r+1$，$a_{r+2}=a_{r+1}-(r+1)=2r-(r+1)=r-1<r+2$，结论成立.

设对某个$1\le t<r-1$，①成立，则由定义

$$a_{r+2t+1}=a_{r+2t}+(r+2t)=r-t+r+2t=2r+t>r+2t+1,$$

$$a_{r+2t+2}=a_{r+2t+1}-(r+2t+1)=2r+t-(r+2t+1)=r-t-1<r+2t+2,$$

即结论对$t+1$也成立．由数学归纳法知，①对所有$t=1,2,\cdots,r-1$成立，特别当$t=r-1$时，有$a_{3r-2}=1$，从而$a_{3r-1}=a_{3r-2}+(3r-2)=3r-1$．

若将所有满足$a_r=r$的正整数r从小到大记为$r_1,r_2,\cdots$，则由上面的结论可知$r_1=1,r_2=2$，$r_{k+1}=3r_k-1$，$k=2,3,\cdots$．　……………………20 分

由此可知，$r_{k+1}-\frac{1}{2}=3\left(r_k-\frac{1}{2}\right)(k=1,\cdots,m-1)$，从而

$$r_m=3^{m-1}\left(r_1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{3^{m-1}+1}{2}.$$

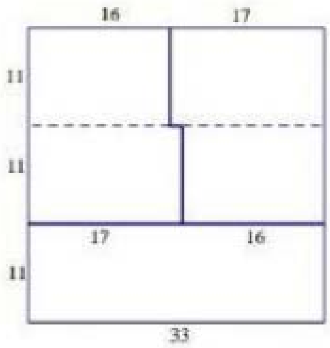
由于 $r_{2018}=\frac{3^{2017}+1}{2}<3^{2017}<\frac{3^{2018}+1}{2}=r_{2019}$，在 $1,2,\cdots,3^{2017}$ 中满足 $a_r=r$ 的数 r 共有2018个，为 $r_1,r_2,\cdots,r_{2018}$. ……………………30分

由①可知，对每个 $k=1,2,\cdots,2017$，$r_k+1,r_k+2,\cdots,3r_k-2$ 中恰有一半满足 $a_r<r$. 由于 $r_{2018}+1=\frac{3^{2017}+1}{2}+1$ 与 3^{2017} 均为奇数，而在 $r_{2018}+1,\ \cdots,3^{2017}$ 中，奇数均满足 $a_r>r$，偶数均满足 $a_r<r$，其中的偶数比奇数少1个. 因此满足 $a_r<r\le 3^{2017}$ 的正整数 r 的个数为

$$\frac{1}{2}\left(3^{2017}-2018-1\right)=\frac{3^{2017}-2019}{2}.$$ ……………………40分

三.

解：记分隔边的条数为 L. 首先，将方格纸按如图分成三个区域，分别染成三种颜色， 粗线上均为分隔边，此时共有56条分隔边，即 $L=56$. …………10分



下面证明$L\ge 56$．将方格纸的行从上至下依次记为$A_1,A_2,\cdots,A_{33}$，列从左至右依次记为$B_1,B_2,\cdots,B_{33}$．行A_i中方格出现的颜色数记为$n(A_i)$，列B_i中方格出现的颜色个数记为$n(B_i)$．三种颜色分别记为c_1,c_2,c_3．对于一种颜色c_j，设$n(c_j)$是含有c_j色方格的行数与列数之和．记

$$\delta(A_i,c_j)=\begin{cases}1, & 若A_i行含有c_j色方格,\\ 0, & 否则,\end{cases}$$

类似地定义$\delta(B_i,c_j)$．于是

$$\sum_{i=1}^{33}(n(A_i)+n(B_i))=\sum_{i=1}^{33}\sum_{j=1}^{3}(\delta(A_i,c_j)+\delta(B_i,c_j))$$
$$=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{33}(\delta(A_i,c_j)+\delta(B_i,c_j))=\sum_{j=1}^{3}n(c_j).$$

由于染c_j色的方格有$\frac{1}{3}\cdot 33^2=363$个，设含有$c_j$色方格的行有$a$个，列有$b$个，则$c_j$色的方格一定在这$a$行和$b$列的交叉方格中，因此$ab\ge 363$，从而

$$n(c_j)=a+b\ge 2\sqrt{ab}\ge 2\sqrt{363}>38,$$

故
$$n(c_j)\ge 39,\ j=1,2,3. \qquad ①$$

…………………20分

由于在行A_i中有$n(A_i)$种颜色的方格，因此至少有$n(A_i)-1$条分隔边．同理在列B_j中，至少有$n(B_j)-1$条分隔边．于是

$$L\ge\sum_{i=1}^{33}(n(A_i)-1)+\sum_{i=1}^{33}(n(B_i)-1)$$
$$=\sum_{i=1}^{33}(n(A_i)+n(B_i))-66 \qquad ②$$
$$=\sum_{j=1}^{3}n(c_j)-66. \qquad ③$$

…………………30分

下面分两种情形讨论．

情形1：有一行或一列全部方格同色．不妨设有一行全为c_1色，从而方格纸的33列中均含有c_1色的方格，由于c_1色方格有363个，故至少有11行中含有c_1色方格，于是

$$n(c_1)\ge 11+33=44. \quad ④$$

由①，③及④即得

$$L\ge n(c_1)+n(c_2)+n(c_3)-66\ge 44+39+39-66=56.$$

…………………40 分

情形 2：没有一行也没有一列的全部方格同色．则对任意$1\le i\le 33$，均有$n(A_i)\ge 2$，$n(B_i)\ge 2$．从而由②知

$$L\ge \sum_{i=1}^{33}(n(A_i)+n(B_i))-66\ge 33\times 4-66=66>56.$$

综上所述，分隔边条数的最小值等于 56.　　…………………50 分

四.

证明：首先证明以下两个结论.

结论 1：存在整数$c_1,c_2,\cdots,c_n$，满足$c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_na_n=1$，并且$|c_i|\le m$，$1\le i\le n$.

由于$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$，由裴蜀定理，存在整数$c_1,c_2,\cdots,c_n$，满足

$$c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_na_n=1. \quad ①$$

下面证明，通过调整，存在一组$c_1,c_2,\cdots,c_n$满足①，且绝对值均不超过m．记

$$S_1(c_1,c_2,\cdots,c_n)=\sum_{c_i>m}c_i\ge 0,\qquad S_2(c_1,c_2,\cdots,c_n)=\sum_{c_j<-m}|c_j|\ge 0.$$

如果$S_1>0$，那么存在$c_i>m>1$，于是$c_ia_i>1$，又因为$a_1,a_2,\cdots,a_n$均为正数，故由①可知存在$c_j<0$．令

$$c_i'=c_i-a_j,\ c_j'=c_j+a_i,\ c_k'=c_k(1\le k\le n,\ k\ne i,j),$$

则

$$c_1'a_1+c_2'a_2+\cdots+c_n'a_n=1, \quad ②$$

并且$0\le m-a_j\le c_i'<c_i$，$c_j<c_j'<a_i\le m$.

因为$c_i'<c_i$，且$c_j'<m$，所以$S_1(c_1',c_2',\cdots,c_n')<S_1(c_1,c_2,\cdots,c_n)$．又$c_j'>c_j$及$c_i'>0$，故$S_2(c_1',c_2',\cdots,c_n')\le S_2(c_1,c_2,\cdots,c_n)$.

如果$S_2>0$，那么存在$c_j<-m$，因此有一个$c_i>0$．令$c_i'=c_i-a_j$，$c_j'=c_j+a_i$，$c_k'=c_k(1\le k\le n,\ k\ne i,j)$，那么②成立，并且$-m<c_i'<c_i$，$c_j<c_j'<0$．与上面类似地可知$S_1(c_1',c_2',\cdots,c_n')\le S_1(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，且$S_2(c_1',c_2',\cdots,c_n')<S_2(c_1,c_2,\cdots,c_n)$.

因为S_1与S_2均是非负整数，故通过有限次上述的调整，可得到一组$c_1,c_2,\cdots,c_n$，使得①成立，并且$S_1=S_2=0$．结论 1 获证.　　…………………20 分

结论 2：（1）对任意实数a,b，均有$\|a+b\|\le\|a\|+\|b\|$.

（2）任意整数u和实数y有$\|uy\|\le|u|\cdot\|y\|$.

由于对任意整数u和实数x，有$\| x+u \|=\| x \|$，故不妨设$a,b\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，此时$\| a \|=|a|$，$\| b \|=|b|$. 若$ab\le 0$，不妨设$a\le 0\le b$，则$a+b\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，从而

$$\| a+b \|=|a+b|\le|a|+|b|=\| a \|+\| b \|.$$

若$ab>0$，即a,b同号. 当$|a|+|b|\le\frac{1}{2}$时，有$a+b\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，此时

$$\| a+b \|=|a+b|=|a|+|b|=\| a \|+\| b \|.$$

当$|a|+|b|>\frac{1}{2}$时，注意总有$\| a+b \|\le\frac{1}{2}$，故

$$\| a+b \|\le\frac{1}{2}<|a|+|b|=\| a \|+\| b \|.$$ ………………30 分

故（1）得证. 由（1）及$\| -y \|=\| y \|$即知（2）成立.

回到原问题，由结论 1，存在整数$c_1,c_2,\cdots,c_n$，使得$c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_na_n=1$，并且$|c_i|\le m$，$1\le i\le n$. 于是

$$\sum_{i=1}^{n}c_ia_ix=x.$$

利用结论 2 得

$$\| x \|=\left\|\sum_{i=1}^{n}c_ia_ix\right\|\le\sum_{i=1}^{n}|c_i|\cdot\| a_ix \|\le m\sum_{i=1}^{n}\| a_ix \|.$$

因此

$$\max_{1\le i\le n}\| a_ix \|\ge\frac{1}{mn}\| x \|. \quad ③$$

………………40 分

若$n\le\frac{1}{2}(m+1)$，由③可知

$$\max_{1\le i\le n}\| a_ix \|\ge\frac{\| x \|}{mn}\ge\frac{2\| x \|}{m(m+1)}.$$

若$n>\frac{1}{2}(m+1)$，则在$a_1,a_2,\cdots,a_n$中存在两个相邻正整数. 不妨设a_1,a_2相邻，则

$$\| x \|=\| a_2x-a_1x \|\le\| a_2x \|+\| a_1x \|.$$

故$\| a_2x \|$与$\| a_1x \|$中有一个$\ge\frac{\| x \|}{2}\ge\frac{2\| x \|}{m(m+1)}$.

综上所述，总存在一个i（$1\le i\le n$），满足$\| a_ix \|\ge\frac{2}{m(m+1)}\| x \|$. ………50 分

2016年全国高中数学联合竞赛一试试题（A卷）

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，共64分.

1. 设实数a满足$a<9a^3-11a<|a|$，则a的取值范围是________.

2. 设复数z,w满足$|z|=3$，$(z+\overline{w})(\overline{z}-w)=7+4\mathrm{i}$，其中$\mathrm{i}$是虚数单位，$\overline{z},\overline{w}$分别表示$z,w$的共轭复数，则$(z+2\overline{w})(\overline{z}-2w)$的模为________.

3. 正实数u,v,w均不等于1，若$\log_u vw+\log_v w=5$，$\log_v u+\log_w v=3$，则$\log_w u$的值为________.

4. 袋子A中装有2张10元纸币和3张1元纸币，袋子B中装有4张5元纸币和3张1元纸币．现随机从两个袋子中各取出两张纸币，则A中剩下的纸币面值之和大于B中剩下的纸币面值之和的概率为________.

5. 设P为一圆锥的顶点，A,B,C是其底面圆周上的三点，满足$\angle ABC=90^\circ$，M为AP的中点．若$AB=1,AC=2,AP=\sqrt{2}$，则二面角$M-BC-A$的大小为________.

6. 设函数$f(x)=\sin^4\dfrac{kx}{10}+\cos^4\dfrac{kx}{10}$，其中$k$是一个正整数．若对任意实数$a$，均有$\{f(x)\,|\,a<x<a+1\}=\{f(x)\,|\,x\in\mathbf{R}\}$，则$k$的最小值为________.

7. 双曲线C的方程为$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$，左、右焦点分别为F_1、F_2．过点F_2作一直线与双曲线C的右半支交于点P,Q，使得$\angle F_1PQ=90^\circ$，则ΔF_1PQ的内切圆半径是________.

8. 设a_1,a_2,a_3,a_4是1, 2, $\cdots$,100中的4个互不相同的数，满足

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(a_2^2+a_3^2+a_4^2)=(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4)^2,$$

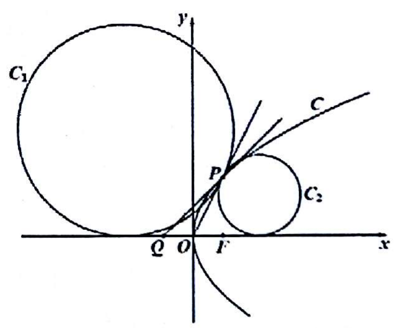
则这样的有序数组(a_1,a_2,a_3,a_4)的个数为________.

二、解答题：本大题共3小题，共56分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本题满分16分）在ΔABC中，已知$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$．求$\sin C$的最大值.

10.（本题满分20分）已知$f(x)$是$\mathbf{R}$上的奇函数，$f(1)=1$，且对任意$x<0$，均有$f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=xf(x)$．求$f(1)f\left(\dfrac{1}{100}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)f\left(\dfrac{1}{99}\right)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)f\left(\dfrac{1}{98}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{1}{50}\right)f\left(\dfrac{1}{51}\right)$的值.

11.（本题满分20分）如图所示，在平面直角坐标系xOy中，F是x轴正半轴上的一个动点．以F为焦点、O为顶点作抛物线C．设P是第一象限内C上的一点，Q是x轴负半轴上一点，使得PQ为C的切线，且$|PQ|=2$．圆C_1,C_2均与直线OP相切于点P，且均与x轴相切．求点F的坐标，使圆C_1与C_2的面积之和取到最小值.



2016年全国高中数学联合竞赛加试试题（A卷）

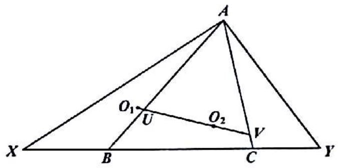
一、（本题满分40分）设实数$a_1, a_2, \cdots, a_{2016}$满足$9a_i > 11a_{i+1}^2\ (i=1,2,\cdots,2015)$．求$(a_1-a_2^2)\cdot(a_2-a_3^2)\cdot\cdots\cdot(a_{2015}-a_{2016}^2)\cdot(a_{2016}-a_1^2)$的最大值．

二、（本题满分 40 分） 如图所示，在$\triangle ABC$中，X,Y是直线BC上两点（X,B,C,Y顺次排列），使得

$$BX\cdot AC = CY\cdot AB.$$

设$\triangle ACX$，$\triangle ABY$的外心分别为O_1,O_2，直线O_1O_2与AB,AC分别交于点U,V．证明：$\triangle AUV$是等腰三角形．

（解题时请将图画在答卷纸上）



三、（本题满分 50 分） 给定空间中 10 个点，其中任意四点不在一个平面上．将某些点之间用线段相连，若得到的图形中没有三角形也没有空间四边形，试确定所连线段数目的最大值．

四、（本题满分50分）设p与$p+2$均是素数，$p>3$．数列$\{a_n\}$定义为$a_1=2$，$a_n = a_{n-1} + \left\lceil \frac{pa_{n-1}}{n} \right\rceil$，$n=2,3,\cdots$．这里$\lceil x \rceil$表示不小于实数$x$的最小整数．

证明：对$n=3,4,\cdots,p-1$均有$n \mid pa_{n-1}+1$成立．

2016 年全国高中数学联合竞赛一试（A 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不要增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不要增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分.

1. 设实数 a 满足 $a<9a^3-11a<|a|$，则 a 的取值范围是____________.

答案： $a\in\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{10}}{3}\right)$.

解： 由 $a<|a|$ 可得 $a<0$，原不等式可变形为

$$1>\frac{9a^3-11a}{a}>\frac{|a|}{a}=-1,$$

即 $-1<9a^2-11<1$，所以 $a^2\in\left(\dfrac{10}{9},\dfrac{4}{3}\right)$. 又 $a<0$，故 $a\in\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{10}}{3}\right)$.

2. 设复数 z,w 满足 $|z|=3,\ (z+\overline{w})(\overline{z}-w)=7+4\mathrm{i}$，其中 i 是虚数单位，$\overline{z},\overline{w}$ 分别表示 z,w 的共轭复数，则 $(z+2\overline{w})(\overline{z}-2w)$ 的模为____________.

答案： $\sqrt{65}$.

解： 由运算性质，$7+4\mathrm{i}=(z+\overline{w})(\overline{z}-w)=|z|^2-|w|^2-(zw-\overline{zw})$，因为 $|z|^2$ 与 $|w|^2$ 为实数，$\mathrm{Re}(zw-\overline{zw})=0$，故 $|z|^2-|w|^2=7,\ zw-\overline{zw}=-4\mathrm{i}$，又 $|z|=3$，所以 $|w|^2=2$. 从而

$$(z+2\overline{w})(\overline{z}-2w)=|z|^2-4|w|^2-2(zw-\overline{zw})=9-8+8\mathrm{i}=1+8\mathrm{i}.$$

因此，$(z+2\overline{w})(\overline{z}-2w)$ 的模为 $\sqrt{1^2+8^2}=\sqrt{65}$.

3. 正实数 u,v,w 均不等于 1，若 $\log_u vw+\log_v w=5$，$\log_v u+\log_w v=3$，则 $\log_w u$ 的值为____________.

答案： $\dfrac{4}{5}$.

解： 令 $\log_u v=a,\ \log_v w=b$，则

$$\log_v u=\frac{1}{a},\ \log_w v=\frac{1}{b},\ \log_u vw=\log_u v+\log_u v\cdot\log_v w=a+ab,$$

条件化为 $a+ab+b=5,\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=3$，由此可得 $ab=\dfrac{5}{4}$. 因此 $\log_w u=\log_w v\cdot\log_v u=\dfrac{1}{ab}=\dfrac{4}{5}$.

4. 袋子 A 中装有 2 张 10 元纸币和 3 张 1 元纸币，袋子 B 中装有 4 张 5 元纸币和 3 张 1 元纸币. 现随机从两个袋子中各取出两张纸币，则 A 中剩下的纸币面值

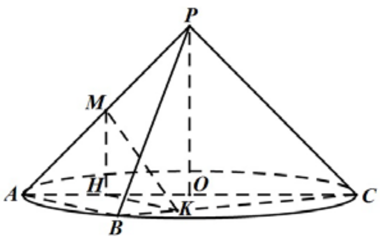
之和大于 B 中剩下的纸币面值之和的概率为____________.

答案：$\dfrac{9}{35}$.

解：一种取法符合要求，等价于从 A 中取走的两张纸币的总面值 a 小于从 B 中取走的两张纸币的总面值 b，从而 $a<b\le 5+5=10$. 故只能从 A 中取走两张1元纸币，相应的取法数为 $C_3^2=3$. 又此时 $b>a=2$，即从 B 中取走的两张纸币不能都是 1 元纸币，相应有 $C_7^2-C_3^2=18$ 种取法. 因此，所求的概率为 $\dfrac{3\times18}{C_5^2\times C_7^2}=\dfrac{54}{10\times21}=\dfrac{9}{35}$.

5. 设 P 为一圆锥的顶点，A,B,C 是其底面圆周上的三点，满足 $\angle ABC=90^\circ$，M 为 AP 的中点. 若 $AB=1, AC=2, AP=\sqrt{2}$，则二面角 $M-BC-A$ 的大小为___________.

答案：$\arctan\dfrac{2}{3}$.



解：由 $\angle ABC=90^\circ$ 知，AC 为底面圆的直径.

设底面中心为 O，则 $PO\perp$ 平面 ABC. 易知 $AO=\dfrac{1}{2}AC=1$，进而 $PO=\sqrt{AP^2-AO^2}=1$.

设 H 为 M 在底面上的射影，则 H 为 AO 的中点. 在底面中作 $HK\perp BC$ 于点 K，则由三垂线定理知 $MK\perp BC$，从而 $\angle MKH$ 为二面角 $M-BC-A$ 的平面角.

因 $MH=AH=\dfrac{1}{2}$，结合 HK 与 AB 平行知，$\dfrac{HK}{AB}=\dfrac{HC}{AC}=\dfrac{3}{4}$，即 $HK=\dfrac{3}{4}$，这样 $\tan\angle MKH=\dfrac{MH}{HK}=\dfrac{2}{3}$. 故二面角 $M-BC-A$ 的大小为 $\arctan\dfrac{2}{3}$.

6. 设函数 $f(x)=\sin^4\dfrac{kx}{10}+\cos^4\dfrac{kx}{10}$，其中 k 是一个正整数. 若对任意实数 a，均有 $\left\{f(x)\,\middle|\,a<x<a+1\right\}=\left\{f(x)\,\middle|\,x\in\mathbf{R}\right\}$，则 k 的最小值为___________.

答案：16.

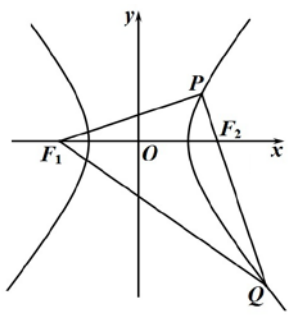
解：由条件知，
$$f(x)=\left(\sin^2\frac{kx}{10}+\cos^2\frac{kx}{10}\right)^2-2\sin^2\frac{kx}{10}\cos^2\frac{kx}{10}$$
$$=1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{kx}{5}=\frac{1}{4}\cos\frac{2kx}{5}+\frac{3}{4},$$
其中当且仅当 $x=\dfrac{5m\pi}{k}(m\in\mathbf{Z})$ 时，$f(x)$ 取到最大值. 根据条件知，任意一个长为1的开区间 $(a,a+1)$ 至少包含一个最大值点，从而 $\dfrac{5\pi}{k}<1$，即 $k>5\pi$.

反之，当 $k>5\pi$ 时，任意一个开区间 $(a,a+1)$ 均包含 $f(x)$ 的一个完整周期，此时 $\left\{f(x)\,\middle|\,a<x<a+1\right\}=\left\{f(x)\,\middle|\,x\in\mathbf{R}\right\}$ 成立.

综上可知，正整数 k 的最小值为 $[5\pi]+1=16$.

7. 双曲线C的方程为$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$，左、右焦点分别为F_1、F_2．过点F_2作一直线与双曲线C的右半支交于点$P,\ Q$，使得$\angle F_1PQ=90°$，则ΔF_1PQ的内切圆半径是___________．

答案：$\sqrt{7}-1$．



解：由双曲线的性质知，$F_1F_2=2\times\sqrt{1+3}=4$，$PF_1-PF_2=QF_1-QF_2=2$．

因$\angle F_1PQ=90°$，故$PF_1{}^2+PF_2{}^2=F_1F_2{}^2$，因此

$$PF_1+PF_2=\sqrt{2(PF_1{}^2+PF_2{}^2)-(PF_1-PF_2)^2}$$
$$=\sqrt{2\times4^2-2^2}=2\sqrt{7}.$$

从而直角ΔF_1PQ的内切圆半径是

$$r=\frac{1}{2}(F_1P+PQ-F_1Q)=\frac{1}{2}(PF_1+PF_2)-\frac{1}{2}(QF_1-QF_2)=\sqrt{7}-1.$$

8. 设a_1,a_2,a_3,a_4是$1,\ 2,\ \cdots,100$中的 4 个互不相同的数，满足

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(a_2^2+a_3^2+a_4^2)=(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4)^2,$$

则这样的有序数组(a_1,a_2,a_3,a_4)的个数为___________．

答案：40．

解：由柯西不等式知，$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(a_2^2+a_3^2+a_4^2)\ge(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4)^2$，等号成立的充分必要条件是$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{a_2}{a_3}=\dfrac{a_3}{a_4}$，即$a_1,a_2,a_3,a_4$成等比数列．于是问题等价于计算满足$\{a_1,a_2,a_3,a_4\}\subseteq\{1,\ 2,\ 3,\cdots,100\}$的等比数列$a_1,a_2,a_3,a_4$的个数．设等比数列的公比$q\ne1$，且$q$为有理数．记$q=\dfrac{n}{m}$，其中$m,n$为互素的正整数，且$m\ne n$．

先考虑$n>m$的情况．

此时$a_4=a_1\cdot\left(\dfrac{n}{m}\right)^3=\dfrac{a_1n^3}{m^3}$，注意到$m^3,n^3$互素，故$l=\dfrac{a_1}{m^3}$为正整数．相应地，$a_1,a_2,a_3,a_4$分别等于$m^3l,\ m^2nl,\ mn^2l,\ n^3l$，它们均为正整数．这表明，对任意给定的$q=\dfrac{n}{m}>1$，满足条件并以$q$为公比的等比数列$a_1,a_2,a_3,a_4$的个数，即为满足不等式$n^3l\le100$的正整数$l$的个数，即$\left[\dfrac{100}{n^3}\right]$．

由于$5^3>100$，故仅需考虑$q=2,\ 3,\ \dfrac{3}{2},\ 4,\ \dfrac{4}{3}$这些情况，相应的等比数列的个数为$\left[\dfrac{100}{8}\right]+\left[\dfrac{100}{27}\right]+\left[\dfrac{100}{27}\right]+\left[\dfrac{100}{64}\right]+\left[\dfrac{100}{64}\right]=12+3+3+1+1=20$．

当$n<m$时，由对称性可知，亦有20个满足条件的等比数列a_1,a_2,a_3,a_4．

综上可知，共有40个满足条件的有序数组(a_1,a_2,a_3,a_4)．

二、解答题：本大题共 3 小题，共 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（本题满分 16 分）在 ΔABC 中，已知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$．求 $\sin C$ 的最大值．

解：由数量积的定义及余弦定理知，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=cb\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$．

同理得，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2}$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$．故已知条件化为

$$b^2+c^2-a^2+2(a^2+c^2-b^2)=3(a^2+b^2-c^2),$$

即 $a^2+2b^2=3c^2$．　　…………………8 分

由余弦定理及基本不等式，得

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-\frac{1}{3}(a^2+2b^2)}{2ab}$$

$$=\frac{a}{3b}+\frac{b}{6a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{3b}\cdot\frac{b}{6a}}=\frac{\sqrt{2}}{3},$$

所以 $$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}\leq\frac{\sqrt{7}}{3},$$ …………………12 分

等号成立当且仅当 $a:b:c=\sqrt{3}:\sqrt{6}:\sqrt{5}$．因此 $\sin C$ 的最大值是 $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$．

…………………16 分

10.（本题满分 20 分）已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$f(1)=1$，且对任意 $x<0$，均有 $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=xf(x)$．

求 $f(1)f\left(\dfrac{1}{100}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)f\left(\dfrac{1}{99}\right)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)f\left(\dfrac{1}{98}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{1}{50}\right)f\left(\dfrac{1}{51}\right)$ 的值．

解：设 $a_n=f\left(\dfrac{1}{n}\right)(n=1,2,3,\cdots)$，则 $a_1=f(1)=1$．

在 $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=xf(x)$ 中取 $x=-\dfrac{1}{k}(k\in\mathbf{N}^*)$，注意到 $\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{-\frac{1}{k}}{-\frac{1}{k}-1}=\dfrac{1}{k+1}$，及 $f(x)$ 为奇函数，可知

$$f\left(\frac{1}{k+1}\right)=-\frac{1}{k}\cdot f\left(-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k}\cdot f\left(\frac{1}{k}\right),$$ ……………5 分

即 $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=\dfrac{1}{k}$．从而 $a_n=a_1\cdot\prod\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=\prod\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{(n-1)!}$．　　……………10 分

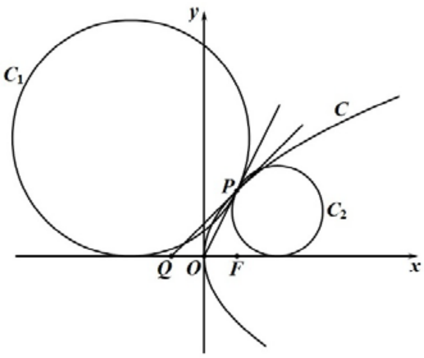
因此

$$\sum_{i=1}^{50}a_ia_{101-i}=\sum_{i=1}^{50}\frac{1}{(i-1)!\cdot(100-i)!}=\sum_{i=0}^{49}\frac{1}{i!\cdot(99-i)!}$$

$$=\frac{1}{99!}\cdot\sum_{i=0}^{49}\mathrm{C}_{99}^{i}=\frac{1}{99!}\cdot\sum_{i=0}^{49}\frac{1}{2}\left(\mathrm{C}_{99}^{i}+\mathrm{C}_{99}^{99-i}\right)=\frac{1}{99!}\times\frac{1}{2}\times 2^{99}=\frac{2^{98}}{99!}.$$

………………20 分

11.（本题满分 20 分）如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，F 是 x 轴正半轴上的一个动点．以 F 为焦点、O 为顶点作抛物线 C．设 P 是第一象限内 C 上的一点，Q 是 x 轴负半轴上一点，使得 PQ 为 C 的切线，且 $|PQ|=2$．圆 C_1, C_2 均与直线 OP 相切于点 P，且均与 x 轴相切．求点 F 的坐标，使圆 C_1 与 C_2 的面积之和取到最小值．



解：设抛物线 C 的方程是 $y^2=2px\ (p>0)$，点 Q 的坐标为 $(-a,0)(a>0)$，并设 C_1, C_2 的圆心分别为 $O_1(x_1,y_1), O_2(x_2,y_2)$．

设直线 PQ 的方程为 $x=my-a(m>0)$，将其与 C 的方程联立，消去 x 可知

$$y^2-2pmy+2pa=0.$$

因为 PQ 与 C 相切于点 P，所以上述方程的判别式为 $\Delta=4p^2m^2-4\cdot 2pa=0$，解得 $m=\sqrt{\frac{2a}{p}}$．进而可知，点 P 的坐标为 $(x_P,y_P)=(a,\sqrt{2pa})$．于是

$$|PQ|=\sqrt{1+m^2}\cdot|y_P-0|=\sqrt{1+\frac{2a}{p}}\cdot\sqrt{2pa}=\sqrt{2a(p+2a)}.$$

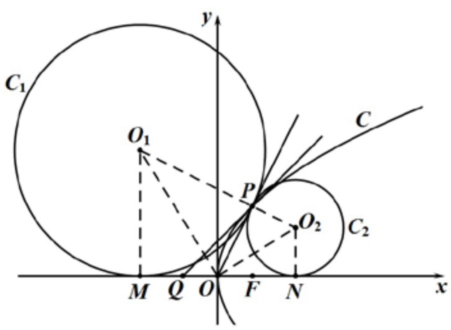
由 $|PQ|=2$ 可得

$$4a^2+2pa=4. \qquad ①$$

………………5 分

注意到 OP 与圆 C_1, C_2 相切于点 P，所以 $OP\perp O_1O_2$．设圆 C_1, C_2 与 x 轴分别相切于点 M, N，则 OO_1, OO_2 分别是 $\angle POM, \angle PON$ 的平分线，故 $\angle O_1OO_2=90°$．从而由射影定理知

$$y_1y_2=O_1M\cdot O_2N=O_1P\cdot O_2P=OP^2$$
$$=x_P^2+y_P^2=a^2+2pa.$$



结合①，就有

$$y_1y_2=a^2+2pa=4-3a^2. \qquad ②$$

………………10 分

由 O_1, P, O_2 共线，可得

$$\frac{y_1-\sqrt{2pa}}{\sqrt{2pa}-y_2}=\frac{y_1-y_P}{y_P-y_2}=\frac{O_1P}{PO_2}=\frac{O_1M}{O_2N}=\frac{y_1}{y_2},$$

化简得

$$y_1+y_2=\frac{2}{\sqrt{2pa}}\cdot y_1y_2. \qquad ③$$

…………………15 分

令 $T=y_1^2+y_2^2$，则圆 C_1, C_2 的面积之和为 πT．根据题意，仅需考虑 T 取到最小值的情况．

根据②、③可知，

$$T=(y_1+y_2)^2-2y_1y_2=\frac{4}{2pa}y_1^2y_2^2-2y_1y_2$$

$$=\frac{4}{4-4a^2}(4-3a^2)^2-2(4-3a^2)=\frac{(4-3a^2)(2-a^2)}{1-a^2}.$$

作代换 $t=1-a^2$．由于 $4t=4-4a^2=2pa>0$，所以 $t>0$．于是

$$T=\frac{(3t+1)(t+1)}{t}=3t+\frac{1}{t}+4\geq 2\sqrt{3t\cdot\frac{1}{t}}+4=2\sqrt{3}+4.$$

上式等号成立当且仅当 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$，此时 $a=\sqrt{1-t}=\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$．因此结合①得，

$$\frac{p}{2}=\frac{1-a^2}{a}=\frac{t}{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}}=\frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}},$$

从而 F 的坐标为 $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}},\ 0\right)$. …………………20 分

2016 年全国高中数学联合竞赛加试（A 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不要增加其他中间档次.

一、（本题满分 40 分）设实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2016}$ 满足 $9a_i > 11a_{i+1}^2 (i=1,2,\cdots,2015)$.

求 $(a_1-a_2^2)\cdot(a_2-a_3^2)\cdot\cdots\cdot(a_{2015}-a_{2016}^2)\cdot(a_{2016}-a_1^2)$ 的最大值.

解 令 $P=(a_1-a_2^2)\cdot(a_2-a_3^2)\cdot\cdots\cdot(a_{2015}-a_{2016}^2)\cdot(a_{2016}-a_1^2)$.

由已知得，对 $i=1,2,\cdots,2015$，均有 $a_i-a_{i+1}^2>\dfrac{11}{9}a_{i+1}^2-a_{i+1}^2\ge 0$.

若 $a_{2016}-a_1^2\le 0$，则 $S\le 0$. ……………………10 分

以下考虑 $a_{2016}-a_1^2>0$ 的情况．约定 $a_{2017}=a_1$．由平均不等式得

$$P^{\frac{1}{2016}}\le\frac{1}{2016}\sum_{i=1}^{2016}(a_i-a_{i+1}^2)=\frac{1}{2016}\left(\sum_{i=1}^{2016}a_i-\sum_{i=1}^{2016}a_{i+1}^2\right)$$

$$=\frac{1}{2016}\left(\sum_{i=1}^{2016}a_i-\sum_{i=1}^{2016}a_i^2\right)=\frac{1}{2016}\sum_{i=1}^{2016}a_i(1-a_i)$$ ……………………20 分

$$\le\frac{1}{2016}\sum_{i=1}^{2016}\left(\frac{a_i+(1-a_i)}{2}\right)^2=\frac{1}{2016}\cdot 2016\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4},$$

所以 $$P\le\frac{1}{4^{2016}}.$$ ……………………30 分

当 $a_1=a_2=\cdots=a_{2016}=\dfrac{1}{2}$ 时，上述不等式等号成立，且有 $9a_i>11a_{i+1}^2$ $(i=1,2,\cdots,2015)$，此时 $P=\dfrac{1}{4^{2016}}$.

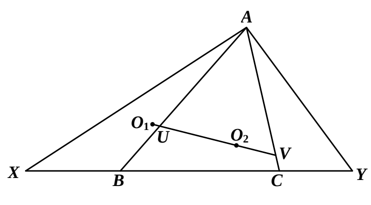
综上所述，所求最大值为 $\dfrac{1}{4^{2016}}$. ……………………40 分

二、（本题满分 40 分）如图所示，在△ ABC 中，X,Y 是直线 BC 上两点（ X,B,C,Y 顺次排列），使得

$$BX\cdot AC=CY\cdot AB.$$

设△ ACX，△ ABY 的外心分别为 O_1,O_2，直线 O_1O_2 与 AB,AC 分别交于点 U,V.

证明：△ AUV 是等腰三角形.



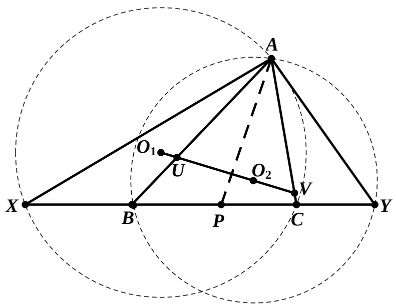
证法一 作$\angle BAC$的内角平分线交BC于点P．设三角形ACX和ABY的外接圆分别为ω_1和ω_2．由内角平分线的性质知，$\dfrac{BP}{CP}=\dfrac{AB}{AC}$．由条件可得$\dfrac{BX}{CY}=\dfrac{AB}{AC}$．从而

$$\frac{PX}{PY}=\frac{BX+BP}{CY+CP}=\frac{AB}{AC}=\frac{BP}{CP},$$

即$CP\cdot PX=BP\cdot PY$． …………………20 分

故P对圆ω_1和ω_2的幂相等，所以P在ω_1和ω_2的根轴上． ……………30 分

于是$AP\perp O_1O_2$，这表明点U,V关于直线AP对称，从而三角形AUV是等腰三角形. …………………40 分



证法二 设$\triangle ABC$的外心为O，连接OO_1,OO_2．过点O,O_1,O_2分别作直线BC的垂线，垂足分别为D,D_1,D_2．作$O_1K\perp OD$于点K．

我们证明$OO_1=OO_2$．在直角三角形OKO_1中，

$$OO_1=\frac{O_1K}{\sin\angle O_1OK}.$$

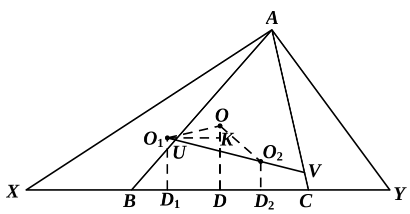
由外心的性质，$OO_1\perp AC$．又$OD\perp BC$，故$\angle O_1OK=\angle ACB$．

而D,D_1分别是BC,CX的中点，所以$DD_1=CD_1-CD=\dfrac{1}{2}CX-\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}BX$．因此

$$OO_1=\frac{O_1K}{\sin\angle O_1OK}=\frac{DD_1}{\sin\angle ACB}=\frac{\frac{1}{2}BX}{\frac{AB}{2R}}=R\cdot\frac{BX}{AB},$$

这里R是$\triangle ABC$的外接圆半径．同理$OO_2=R\cdot\dfrac{CY}{AC}$． …………………10 分

由已知条件可得$\dfrac{BX}{AB}=\dfrac{CY}{AC}$，故$OO_1=OO_2$． …………………20 分



由于$OO_1\perp AC$，所以$\angle AVU=90^\circ-\angle OO_1O_2$．同理$\angle AUV=90^\circ-\angle OO_2O_1$．

…………………30 分

又因为$OO_1=OO_2$，故$\angle OO_1O_2=\angle OO_2O_1$，从而$\angle AUV=\angle AVU$．这样$AU=AV$，即$\triangle AUV$是等腰三角形. …………………40 分

三、（本题满分 50 分） 给定空间中 10 个点，其中任意四点不在一个平面上．将某些点之间用线段相连，若得到的图形中没有三角形也没有空间四边形，试确定所连线段数目的最大值．

解 以这 10 个点为顶点，所连线段为边，得到一个 10 阶简单图G．我们证明G的边数不超过 15．

设 G 的顶点为 $v_1,v_2,\cdots,v_{10}$，共有 k 条边，用 $\deg(v_i)$ 表示顶点 v_i 的度．若 $\deg(v_i)\le 3$ 对 $i=1,2,\cdots,10$ 都成立，则

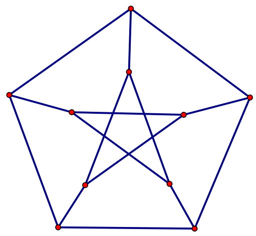
$$k=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10}\deg(v_i)\le\frac{1}{2}\times 10\times 3=15.$$

假设存在 v_i 满足 $\deg(v_i)\ge 4$．不妨设 $\deg(v_1)=n\ge 4$，且 v_1 与 $v_2,\cdots,v_{n+1}$ 均相邻．于是 $v_2,\cdots,v_{n+1}$ 之间没有边，否则就形成三角形．所以，$v_1,v_2,\cdots,v_{n+1}$ 之间恰有 n 条边． …………10 分

对每个 j（$n+2\le j\le 10$），v_j 至多与 $v_2,v_3,\cdots,v_{n+1}$ 中的一个顶点相邻（否则设 v_j 与 $v_s,v_t\left(2\le s<t\le n+1\right)$ 相邻，则 v_1,v_s,v_j,v_t 就对应了一个空间四边形的四个顶点，这与题设条件矛盾．），从而 $v_2,\cdots,v_{n+1}$ 与 $v_{n+2},\cdots,v_{10}$ 之间的边数至多 $10-(n+1)=9-n$ 条． …………20 分

在 $v_{n+2},\cdots,v_n$ 这 $9-n$ 个顶点之间，由于没有三角形，由托兰定理，至多 $\left[\frac{(9-n)^2}{4}\right]$ 条边．因此G的边数

$$k\le n+(9-n)+\left[\frac{(9-n)^2}{4}\right]=9+\left[\frac{(9-n)^2}{4}\right]\le 9+\left[\frac{25}{4}\right]=15.\quad \cdots\cdots 30\text{ 分}$$



如图给出的图共有 15 条边，且满足要求．

综上所述，所求边数的最大值为 15． ……………………50 分

四、（本题满分 50 分） 设 p 与 $p+2$ 均是素数，$p>3$．数列$\{a_n\}$定义为$a_1=2$，$a_n=a_{n-1}+\left\lceil\frac{pa_{n-1}}{n}\right\rceil$，$n=2,3,\cdots$．这里$\lceil x\rceil$表示不小于实数$x$的最小整数．

证明：对$n=3,4,\cdots,p-1$均有$n\mid pa_{n-1}+1$成立．

证明 首先注意，$\{a_n\}$是整数数列．

对n用数学归纳法．当$n=3$时，由条件知$a_2=2+p$，故$pa_2+1=\left(p+1\right)^2$．因 p 与 $p+2$ 均是素数，且 $p>3$，故必须$3\mid p+1$．因此$3\mid pa_2+1$，即$n=3$时结论成立．

对 $3<n\le p-1$，设对 $k=3,\cdots,n-1$ 成立 $k\mid pa_{k-1}+1$，此时 $\left\lceil \dfrac{pa_{k-1}}{k}\right\rceil=\dfrac{pa_{k-1}+1}{k}$，

故
$$pa_{k-1}+1=p\left(a_{k-2}+\left\lceil\frac{pa_{k-2}}{k-1}\right\rceil\right)+1=p\left(a_{k-2}+\frac{pa_{k-2}+1}{k-1}\right)+1$$
$$=\frac{\left(pa_{k-2}+1\right)\left(p+k-1\right)}{k-1}.$$
……………………10 分

故对 $3<n\le p-1$，有
$$pa_{n-1}+1=\frac{p+n-1}{n-1}\left(pa_{n-2}+1\right)=\frac{p+n-1}{n-1}\cdot\frac{p+n-2}{n-2}\left(pa_{n-3}+1\right)$$
$$=\cdots=\frac{p+n-1}{n-1}\cdot\frac{p+n-2}{n-2}\cdots\cdots\frac{p+3}{3}\left(pa_2+1\right),$$
………20 分

因此
$$pa_{n-1}+1=\frac{2n\left(p+1\right)}{\left(p+n\right)\left(p+2\right)}C_{p+n}^{n}.$$

由此知（注意 C_{p+n}^{n} 是整数） $n\mid\left(p+n\right)\left(p+2\right)\left(pa_{n-1}+1\right).$ ①

……………………40 分

因 $n<p$， p 素数，故 $\left(n,n+p\right)=\left(n,\ p\right)=1$，又 $p+2$ 是大于 n 的素数，故 $\left(n,\ p+2\right)=1$，从而 n 与 $\left(p+n\right)\left(p+2\right)$ 互素，故由①知 $n\mid pa_{n-1}+1$．由数学归纳法知，本题得证．
……………………50 分

2015 年全国高中数学联合竞赛一试（A 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不要增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不要增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 设 a, b 为不相等的实数，若二次函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 满足 $f(a)=f(b)$，则 $f(2)$ 的值为____________.

答案：4.

解：由已知条件及二次函数图像的轴对称性，可得 $\dfrac{a+b}{2}=-\dfrac{a}{2}$，即 $2a+b=0$，所以

$$f(2)=4+2a+b=4.$$

2. 若实数 α 满足 $\cos\alpha=\tan\alpha$，则 $\dfrac{1}{\sin\alpha}+\cos^4\alpha$ 的值为____________.

答案：2.

解：由条件知，$\cos^2\alpha=\sin\alpha$，反复利用此结论，并注意到 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$，得

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\cos^4\alpha=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha}+\sin^2\alpha$$

$$=(1+\sin\alpha)+(1-\cos^2\alpha)=2+\sin\alpha-\cos^2\alpha=2.$$

3. 已知复数数列 $\{z_n\}$ 满足 $z_1=1,\ z_{n+1}=\overline{z_n}+1+n\mathrm{i}\ (n=1,\ 2,\cdots)$，其中 i 为虚数单位，$\overline{z_n}$ 表示 z_n 的共轭复数，则 z_{2015} 的值为____________.

答案： $2015+1007\mathrm{i}$.

解：由已知得，对一切正整数 n，有

$$z_{n+2}=\overline{z_{n+1}}+1+(n+1)\mathrm{i}=\overline{\overline{z_n}+1+n\mathrm{i}}+1+(n+1)\mathrm{i}=z_n+2+\mathrm{i},$$

于是 $z_{2015}=z_1+1007\times(2+\mathrm{i})=2015+1007\mathrm{i}$.

4. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2,\ AD=1$，边 DC 上（包含点 D、C）的动点 P 与 CB 延长线上（包含点 B）的动点 Q 满足 $\left|\overrightarrow{DP}\right|=\left|\overrightarrow{BQ}\right|$，则向量 $\overrightarrow{PA}$ 与向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的数量积 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}$ 的最小值为____________.

答案： $\dfrac{3}{4}$.

解：不妨设 $A(0,0), B(2,0), D(0,1)$. 设 P 的坐标为 $(t,1)$（其中 $0\le t\le 2$），则由 $\left|\overrightarrow{DP}\right|=\left|\overrightarrow{BQ}\right|$ 得 Q 的坐标为 $(2,-t)$，故 $\overrightarrow{PA}=(-t,-1),\ \overrightarrow{PQ}=(2-t,-t-1)$，因此

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}=(-t)\cdot(2-t)+(-1)\cdot(-t-1)=t^2-t+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}.$$

当$t=\dfrac{1}{2}$时，$\left(\overline{PA}\cdot\overline{PQ}\right)_{\min}=\dfrac{3}{4}$.

5. 在正方体中随机取3条棱，它们两两异面的概率为__________.

答案： $\dfrac{2}{55}$.

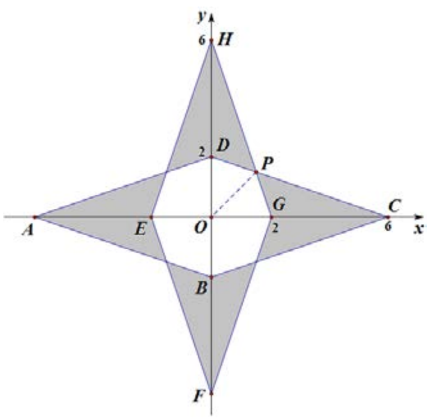
解：设正方体为$ABCD-EFGH$，它共有12条棱，从中任意取出3条棱的方法共有$C_{12}^{3}=220$种.

下面考虑使3条棱两两异面的取法数．由于正方体的棱共确定3个互不平行的方向（即AB、AD、AE的方向），具有相同方向的4条棱两两共面，因此取出的3条棱必属于3个不同的方向．可先取定AB方向的棱，这有4种取法．不妨设取的棱就是AB，则AD方向只能取棱EH或棱FG，共2种可能．当AD方向取棱是EH或FG时，AE方向取棱分别只能是CG或DH.

由上可知，3条棱两两异面的取法数为$4\times2=8$，故所求概率为$\dfrac{8}{220}=\dfrac{2}{55}$.

6. 在平面直角坐标系xOy中，点集$K=\left\{(x,\ y)\big|\left(|x|+|3y|-6\right)\left(|3x|+|y|-6\right)\le0\right\}$所对应的平面区域的面积为__________.

答案： 24.



解：设$K_1=\left\{(x,\ y)\big||x|+|3y|-6\le0\right\}$．先考虑$K_1$在第一象限中的部分，此时有$x+3y\le6$，故这些点对应于图中的$\Delta OCD$及其内部．由对称性知，$K_1$对应的区域是图中以原点$O$为中心的菱形$ABCD$及其内部.

同理，设$K_2=\left\{(x,\ y)\big||3x|+|y|-6\le0\right\}$，则$K_2$对应的区域是图中以$O$为中心的菱形$EFGH$及其内部.

由点集K的定义知，K所对应的平面区域是被K_1、K_2中恰好一个所覆盖的部分，因此本题所要求的即为图中阴影区域的面积S.

由于直线CD的方程为$x+3y=6$，直线GH的方程为$3x+y=6$，故它们的交点P的坐标为$\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$．由对称性知，

$$S=8S_{\Delta CPG}=8\times\frac{1}{2}\times4\times\frac{3}{2}=24.$$

7. 设ω为正实数，若存在$a,\ b\ (\pi\le a<b\le2\pi)$，使得$\sin\omega a+\sin\omega b=2$，则$\omega$的取值范围是__________.

答案： $\omega\in\left[\dfrac{9}{4},\ \dfrac{5}{2}\right]\cup\left[\dfrac{13}{4},\ +\infty\right)$.

解：由$\sin\omega a+\sin\omega b=2$知，$\sin\omega a=\sin\omega b=1$，而$[\omega a,\ \omega b]\subseteq[\omega\pi,\ 2\omega\pi]$，故题目条件等价于：存在整数$k,\ l\ (k<l)$，使得

$$\omega\pi \le 2k\pi+\frac{\pi}{2}<2l\pi+\frac{\pi}{2}\le 2\omega\pi . \qquad ①$$

当 $\omega \ge 4$ 时，区间 $[\omega\pi,\ 2\omega\pi]$ 的长度不小于 4π，故必存在 $k,\ l$ 满足①式．

当 $0<\omega<4$ 时，注意到 $[\omega\pi,\ 2\omega\pi]\subseteq(0,\ 8\pi)$，故仅需考虑如下几种情况：

(i) $\omega\pi \le \frac{\pi}{2}<\frac{5\pi}{2}\le 2\omega\pi$，此时 $\omega\le\frac{1}{2}$ 且 $\omega\ge\frac{5}{4}$，无解；

(ii) $\omega\pi \le \frac{5\pi}{2}<\frac{9\pi}{2}\le 2\omega\pi$，此时有 $\frac{9}{4}\le\omega\le\frac{5}{2}$；

(iii) $\omega\pi \le \frac{9\pi}{2}<\frac{13\pi}{2}\le 2\omega\pi$，此时有 $\frac{13}{4}\le\omega\le\frac{9}{2}$，得 $\frac{13}{4}\le\omega<4$．

综合(i)、(ii)、(iii)，并注意到 $\omega\ge4$ 亦满足条件，可知 $\omega\in\left[\frac{9}{4},\ \frac{5}{2}\right]\cup\left[\frac{13}{4},\ +\infty\right)$．

8. 对四位数 $\overline{abcd}\ (1\le a\le 9,\ 0\le b,c,d\le 9)$，若 $a>b,\ b<c,\ c>d$，则称 $\overline{abcd}$ 为 P 类数；若 $a<b,\ b>c,\ c<d$，则称 $\overline{abcd}$ 为 Q 类数．用 $N(P)$ 与 $N(Q)$ 分别表示 P 类数与 Q 类数的个数，则 $N(P)-N(Q)$ 的值为____________．

答案：285．

解：分别记 P 类数、Q 类数的全体为 A、B，再将个位数为零的 P 类数全体记为 A_0，个位数不等于零的 P 类数全体记为 A_1．

对任一四位数 $\overline{abcd}\in A_1$，将其对应到四位数 $\overline{dcba}$，注意到 $a>b,\ b<c,\ c>d\ge1$，故 $\overline{dcba}\in B$．反之，每个 $\overline{dcba}\in B$ 唯一对应于 A_1 中的元素 $\overline{abcd}$．这建立了 A_1 与 B 之间的一一对应，因此有

$$N(P)-N(Q)=|A|-|B|=|A_0|+|A_1|-|B|=|A_0| .$$

下面计算 $|A_0|$：对任一四位数 $\overline{abc0}\in A_0$，b 可取 $0,1,\cdots,9$，对其中每个 b，由 $b<a\le 9$ 及 $b<c\le9$ 知，a 和 c 分别有 $9-b$ 种取法，从而

$$|A_0|=\sum_{b=0}^{9}(9-b)^2=\sum_{k=1}^{9}k^2=\frac{9\times10\times19}{6}=285 .$$

因此，$N(P)-N(Q)=285$．

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（本题满分 16 分）若实数 $a,\ b,\ c$ 满足 $2^a+4^b=2^c,\ 4^a+2^b=4^c$，求 c 的最小值．

解：将 $2^a,\ 2^b,\ 2^c$ 分别记为 $x,\ y,\ z$，则 $x,\ y,\ z>0$．

由条件知，$x+y^2=z,\ x^2+y=z^2$，故

$$z^2-y=x^2=(z-y^2)^2=z^2-2y^2z+y^4 . \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 8 \text{ 分}$$

因此，结合平均值不等式可得，

$$z=\frac{y^4+y}{2y^2}=\frac{1}{4}\left(2y^2+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\right)\geq\frac{1}{4}\cdot 3\sqrt[3]{2y^2\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y}}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}.$$

…………………12 分

当 $2y^2=\frac{1}{y}$，即 $y=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 时，z 的最小值为 $\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$（此时相应的 x 值为 $\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$，符合要求）.

由于 $c=\log_2 z$，故 c 的最小值为 $\log_2\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}\right)=\log_2 3-\frac{5}{3}$.　　…………………16 分

10. （本题满分 20 分）设 a_1,a_2,a_3,a_4 是 4 个有理数，使得

$$\left\{a_ia_j \,\middle|\, 1\leq i<j\leq 4\right\}=\left\{-24,-2,-\frac{3}{2},-\frac{1}{8},1,3\right\},$$

求 $a_1+a_2+a_3+a_4$ 的值.

解: 由条件可知，$a_ia_j\left(1\leq i<j\leq 4\right)$ 是 6 个互不相同的数，且其中没有两个为相反数，由此知，a_1,a_2,a_3,a_4 的绝对值互不相等，不妨设 $|a_1|<|a_2|<|a_3|<|a_4|$，则 $|a_i||a_j|\left(1\leq i<j\leq 4\right)$ 中最小的与次小的两个数分别是 $|a_1||a_2|$ 及 $|a_1||a_3|$，最大与次大的两个数分别是 $|a_3||a_4|$ 及 $|a_2||a_4|$，从而必须有

$$\begin{cases}a_1a_2=-\frac{1}{8},\\ a_1a_3=1,\\ a_2a_4=3,\\ a_3a_4=-24,\end{cases}$$

…………………10 分

于是 $a_2=-\frac{1}{8a_1},a_3=\frac{1}{a_1},a_4=\frac{3}{a_2}=-24a_1$.故

$$\{a_2a_3,a_1a_4\}=\left\{-\frac{1}{8a_1^2},-24a_1^2\right\}=\left\{-2,-\frac{3}{2}\right\},$$　　…………15 分

结合 $a_1\in\mathbb{Q}$，只可能 $a_1=\pm\frac{1}{4}$.

由此易知 $a_1=\frac{1}{4},\ a_2=-\frac{1}{2},\ a_3=4,\ a_4=-6$ 或者 $a_1=-\frac{1}{4},\ a_2=\frac{1}{2},\ a_3=-4,\ a_4=6$．经检验知这两组解均满足问题的条件.

故 $a_1+a_2+a_3+a_4=\pm\frac{9}{4}$.　　…………………20 分

11. （本题满分 20 分）在平面直角坐标系 xOy 中，F_1、F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左、右焦点．设不经过焦点 F_1 的直线 l 与椭圆交于两个不同的点 A、B，焦点 F_2 到直线 l 的距离为 d．如果直线 AF_1、l、BF_1 的斜率依次成等差数列，求 d 的取值范围.

解：由条件知，点 F_1、F_2 的坐标分别为 $(-1,\ 0)$ 和 $(1,\ 0)$.

设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，点 A、B 的坐标分别为 $(x_1,\ y_1)$ 和 $(x_2,\ y_2)$，则 $x_1,\ x_2$ 满足方程 $\dfrac{x^2}{2}+(kx+m)^2=1$，即

$$(2k^2+1)x^2+4kmx+(2m^2-2)=0. \qquad ①$$

由于点 A、B 不重合，且直线 l 的斜率存在，故 $x_1,\ x_2$ 是方程①的两个不同实根，因此有①的判别式

$$\Delta=(4km)^2-4\cdot(2k^2+1)\cdot(2m^2-2)=8(2k^2+1-m^2)>0,$$

即

$$2k^2+1>m^2. \qquad ②$$

由直线 AF_1、l、BF_1 的斜率 $\dfrac{y_1}{x_1+1}$、k、$\dfrac{y_2}{x_2+1}$ 依次成等差数列知，$\dfrac{y_1}{x_1+1}+\dfrac{y_2}{x_2+1}=2k$，又 $y_1=kx_1+m,\ y_2=kx_2+m$，所以

$$(kx_1+m)(x_2+1)+(kx_2+m)(x_1+1)=2k(x_1+1)(x_2+1).$$

化简并整理得，

$$(m-k)(x_1+x_2+2)=0.$$

假如 $m=k$，则直线 l 的方程为 $y=kx+k$，即 l 经过点 $F_1(-1,\ 0)$，不符合条件.

因此必有 $x_1+x_2+2=0$，故由方程①及韦达定理知，$\dfrac{4km}{2k^2+1}=-(x_1+x_2)=2$，即

$$m=k+\frac{1}{2k}. \qquad ③$$

由②、③知，$2k^2+1>m^2=\left(k+\dfrac{1}{2k}\right)^2$，化简得 $k^2>\dfrac{1}{4k^2}$，这等价于 $|k|>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

反之，当 $m,\ k$ 满足③及 $|k|>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，l 必不经过点 F_1（否则将导致 $m=k$，与③矛盾），而此时 $m,\ k$ 满足②，故 l 与椭圆有两个不同的交点 A、B，同时也保证了 AF_1、BF_1 的斜率存在（否则 $x_1,\ x_2$ 中的某一个为 -1，结合 $x_1+x_2+2=0$ 知 $x_1=x_2=-1$，与方程①有两个不同的实根矛盾）.　　……………………10 分

点 $F_2(1,\ 0)$ 到直线 $l: y=kx+m$ 的距离为

$$d=\frac{|k+m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\left|2k+\frac{1}{2k}\right|=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}}\cdot\left(2+\frac{1}{2k^2}\right). \qquad ………15 分$$

注意到 $|k|>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，令 $t=\sqrt{\dfrac{1}{k^2}+1}$，则 $t\in(1,\ \sqrt{3})$，上式可改写为

$$d=\frac{1}{t}\cdot\left(\frac{t^2}{2}+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(t+\frac{3}{t}\right). \qquad ④$$

考虑到函数 $f(t)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(t+\dfrac{3}{t}\right)$ 在 $[1,\ \sqrt{3}]$ 上单调递减，故由④得，$f(\sqrt{3})<d<f(1)$，即

$$d\in(\sqrt{3},\ 2). \qquad ……………………20 分$$

2015 年全国高中数学联合竞赛加试（A 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分, 10 分为一个档次，不要增加其他中间档次.

一、（本题满分 40 分） 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\ge 2)$ 是实数，证明：可以选取 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\in\{1,-1\}$，使得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i a_i\right)^2\le(n+1)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right).$$

证法一： 我们证明：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_i-\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}a_j\right)^2\le(n+1)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right), \qquad ①$$

即对 $i=1,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]$，取 $\varepsilon_i=1$；对 $i=\left[\frac{n}{2}\right]+1,\cdots,n$，取 $\varepsilon_i=-1$ 符合要求.（这里，$[x]$ 表示实数 x 的整数部分.） …………………10 分

事实上，①的左边为

$$\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_i+\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}a_j\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_i-\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}a_j\right)^2$$

$$=2\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_i\right)^2+2\left(\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}a_j\right)^2$$

$$\le 2\left[\frac{n}{2}\right]\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_i^2\right)+2\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)\left(\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}a_j^2\right)$$（柯西不等式） …………30 分

$$=2\left[\frac{n}{2}\right]\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_i^2\right)+2\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)\left(\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}a_j^2\right)$$（利用 $n-\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{n+1}{2}\right]$）

$$\le n\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_i^2\right)+(n+1)\left(\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}a_j^2\right)$$（利用 $[x]\le x$）

$$\le (n+1)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right),$$

所以①得证，从而本题得证．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…………………40 分

证法二：首先，由于问题中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的对称性，可设 $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n$．此外，若将 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的负数均改变符号，则问题中的不等式左边的 $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ 不减，而右边的 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ 不变，并且这一手续不影响 $\varepsilon_i = \pm 1$ 的选取，因此我们可进一步设 $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge 0$．　　　　　　　　　　　　　　　…………………10 分

引理：设 $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge 0$，则 $0 \le \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i \le a_1$．

事实上，由于 $a_i \ge a_{i+1}\ (i = 1, 2, \cdots, n-1)$，故当 n 是偶数时，

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) \ge 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{n-2} - a_{n-1}) - a_n \le a_1.$$

当 n 是奇数时，

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{n-2} - a_{n-1}) + a_n \ge 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{n-1} - a_n) \le a_1.$$

引理得证．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…………………30 分

回到原题，由柯西不等式及上面引理可知

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i\right)^2 \le n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + a_1^2$$

$$\le (n+1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

这就证明了结论．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…………………40 分

二、（本题满分 40 分）设 $S=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，其中 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个互不相同的有限集合（$n\ge 2$），满足对任意 $A_i,A_j\in S$，均有 $A_i\bigcup A_j\in S$．若 $k=\min\limits_{1\le i\le n}|A_i|\ge 2$．证明：存在 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，使得 x 属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的至少 $\frac{n}{k}$ 个集合（这里 $|X|$ 表示有限集合 X 的元素个数）.

证明：不妨设 $|A_1|=k$．设在 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中与 A_1 不相交的集合有 s 个，重新记为 $B_1,B_2,\cdots,B_s$，设包含 A_1 的集合有 t 个，重新记为 $C_1,C_2,\cdots,C_t$．由已知条件，$(B_i\bigcup A_1)\in S$，即 $(B_i\bigcup A_1)\in\{C_1,C_2,\cdots,C_t\}$，这样我们得到一个映射

$$f:\{B_1,B_2,\cdots,B_s\}\to\{C_1,C_2,\cdots,C_t\},\quad f(B_i)=B_i\bigcup A_1.$$

显然 f 是单映射，于是 $s\le t$． ……………………10 分

设 $A_1=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$．在 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中除去 $B_1,B_2,\cdots,B_s,C_1,C_2,\cdots,C_t$ 后，在剩下的 $n-s-t$ 个集合中，设包含 a_i 的集合有 x_i 个（$1\le i\le k$），由于剩下的 $n-s-t$ 个集合中每个集合与 A_1 的交非空，即包含某个 a_i，从而

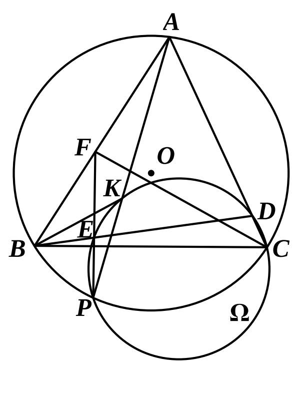
$$x_1+x_2+\cdots+x_k\ge n-s-t.$$ ……………………20 分

不妨设 $x_1=\max\limits_{1\le i\le k}x_i$，则由上式知 $x_1\ge\frac{n-s-t}{k}$，即在剩下的 $n-s-t$ 个集合中，包含 a_1 的集合至少有 $\frac{n-s-t}{k}$ 个．又由于 $A_1\subseteq C_i$（$i=1,\cdots,t$），故 $C_1,C_2,\cdots,C_t$ 都包含 a_1，因此包含 a_1 的集合个数至少为

$$\frac{n-s-t}{k}+t=\frac{n-s+(k-1)t}{k}\ge\frac{n-s+t}{k}\text{（利用 }k\ge 2\text{）}$$

$$\ge\frac{n}{k}\text{（利用 }t\ge s\text{）}.$$ ……………………40 分

三、（本题满分 50 分）如图，ΔABC 内接于圆 O，P 为 $\overset{\frown}{BC}$ 上一点，点 K 在线段 AP 上，使得 BK 平分 $\angle ABC$．过 K、P、C 三点的圆 Ω 与边 AC 交于点 D，连接 BD 交圆 Ω 于点 E，连接 PE 并延长与边 AB 交于点 F．证明：$\angle ABC=2\angle FCB$.



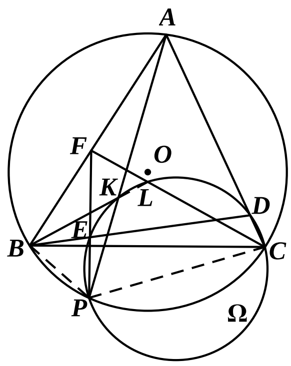
证法一：设 CF 与圆 Ω 交于点 L（异于 C），连接 PB、PC、BL、KL.

注意此时 C、D、L、K、E、P 六点均在圆 Ω 上，结合 A、B、P、C 四点共圆，可知

$$\angle FEB=\angle DEP=180^\circ-\angle DCP=\angle ABP=\angle FBP,$$

因此 $\Delta FBE \backsim \Delta FPB$，故 $FB^2=FE\cdot FP$. ……………………10 分

又由圆幂定理知，$FE\cdot FP=FL\cdot FC$，所以



$$FB^2=FL\cdot FC,$$

从而 $\Delta FBL \backsim \Delta FCB$. ……………………20 分

因此

$$\angle FLB=\angle FBC=\angle APC=\angle KPC=\angle FLK,$$

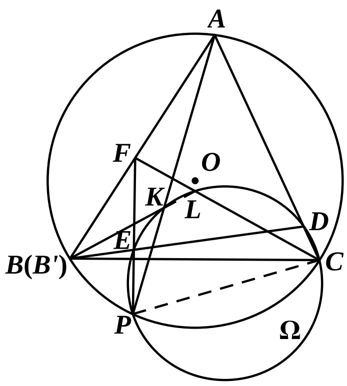
即 B、K、L 三点共线. ……………………30 分

再根据 $\Delta FBL \backsim \Delta FCB$ 得，

$$\angle FCB=\angle FBL=\angle FBE=\frac{1}{2}\angle ABC,$$

即 $\angle ABC=2\angle FCB$. ……………………50 分

证法二：设 CF 与圆 Ω 交于点 L（异于 C）. 对圆内接广义六边形 $DCLKPE$ 应用帕斯卡定理可知，DC 与 KP 的交点 A、CL 与 PE 的交点 F、LK 与 ED 的交点 B' 共线，因此 B' 是 AF 与 ED 的交点，即 $B'=B$. 所以 B、K、L 共线. ……………………30 分



根据 A、B、P、C 四点共圆及 L、K、P、C 四点共圆，得

$$\angle ABC=\angle APC=\angle FLK=\angle FCB+\angle LBC,$$

又由 BK 平分 $\angle ABC$ 知，$\angle LBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，从而 $\angle ABC=2\angle FCB$.

……………………50 分

四、（本题满分 50 分）求具有下述性质的所有正整数 k：对任意正整数 n，$2^{(k-1)n+1}$ 不整除 $\frac{(kn)!}{n!}$.

解：对正整数 m，设 $v_2(m)$ 表示正整数 m 的标准分解中素因子 2 的方幂，则熟知

$$\nu_2(m!)=m-S(m)\,,\qquad ①$$

这里$S(m)$表示正整数m在二进制表示下的数码之和.

由于 $2^{(k-1)n+1}$ 不整除 $\frac{(kn)!}{n!}$ 等价于 $\nu_2\left(\frac{(kn)!}{n!}\right)\le(k-1)n$，即 $kn-\nu_2((kn)!)\ge n-\nu_2(n!)$，进而由①知，本题等价于求所有正整数$k$，使得 $S(kn)\ge S(n)$ 对任意正整数n成立. ……………………10 分

我们证明，所有符合条件的k为$2^a(a=0,1,2,\cdots)$.

一方面，由于$S(2^a n)=S(n)$对任意正整数n成立，故$k=2^a$符合条件.

……………………20 分

另一方面，若k不是 2 的方幂，设$k=2^a\cdot q$，$a\ge 0$，q是大于 1 的奇数.

下面构造一个正整数n，使得$S(kn)<S(n)$. 因为$S(kn)=S(2^a qn)=S(qn)$，因此问题等价于我们选取q的一个倍数m，使得$S(m)<S\left(\frac{m}{q}\right)$.

由$(2,q)=1$，熟知存在正整数u，使得$2^u\equiv 1(\bmod q)$.（事实上，由欧拉定理知，u可以取$\varphi(q)$.）

设奇数q的二进制表示为$2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\cdots+2^{\alpha_t},0=\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_t,\ t\ge 2$.

取$m=2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\cdots+2^{\alpha_{t-1}}+2^{\alpha_t+tu}$，则$S(m)=t$，且

$$m=q+2^{\alpha_t}(2^{tu}-1)\equiv 0\,(\bmod q)\,.$$

我们有

$$\frac{m}{q}=1+2^{\alpha_t}\cdot\frac{2^{tu}-1}{q}=1+2^{\alpha_t}\cdot\frac{2^u-1}{q}\left(1+2^u+\cdots+2^{(t-1)u}\right)$$

$$=1+\sum_{l=0}^{t-1}\frac{2^u-1}{q}\cdot 2^{lu+\alpha_t}\,.\qquad ②$$

由于$0<\frac{2^u-1}{q}<2^u$，故正整数$\frac{2^u-1}{q}$的二进制表示中的最高次幂小于u，由此易知，对任意整数$i,j\,(0\le i<j\le t-1)$，数$\frac{2^u-1}{q}\cdot 2^{iu+\alpha_t}$与$\frac{2^u-1}{q}\cdot 2^{ju+\alpha_t}$的二进制表示

中没有相同的项.

又因为$\alpha_t>0$，故$\frac{2^u-1}{q}\cdot 2^{lu+\alpha_t}\left(l=0,1,\cdots,t-1\right)$的二进制表示中均不包含 1，故由②可知

$$S\left(\frac{m}{q}\right)=1+S\left(\frac{2^u-1}{q}\right)\cdot t>t=S(m),$$

因此上述选取的m满足要求.

综合上述的两个方面可知，所求的k为$2^a(a=0,1,2,\cdots)$. ……………50 分

2015年全国高中数学联合竞赛一试试题(A卷)

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，满分64分

1. 设a,b为不相等的实数，若二次函数$f(x)=x^2+ax+b$满足$f(a)=f(b)$，则$f(2)$的值为___

2. 若实数α满足$\cos\alpha=\tan\alpha$，则$\dfrac{1}{\sin\alpha}+\cos^4\alpha$的值为____________

3. 已知复数数列$\{z_n\}$满足$z_1=1,z_{n+1}=\overline{z_n}+1+ni(n=1,2,3,\cdots)$，其中$i$为虚数单位，$\overline{z_n}$表示$z_n$的共轭复数，则$z_{2015}$的值为____________

4. 在矩形$ABCD$中，$AB=2,AD=1$，边DC（包含点D,C）上的动点P与CB延长线上（包含点B）的动点Q满足$\left|\overrightarrow{DP}\right|=\left|\overrightarrow{BQ}\right|$，则向量$\overrightarrow{PA}$与向量$\overrightarrow{PQ}$的数量积$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}$的最小值为________

5. 在正方体中随机取3条棱，它们两两异面的概率为____________

6. 在平面直角坐标系xOy中，点集$K=\left\{(x,y)\middle|(|x|+|3y|-6)(|3x|+|y|-6)\le 0\right\}$所对应的平面区域的面积为____________

7. 设ω为正实数，若存在$a,b(\pi\le a<b\le 2\pi)$，使得$\sin\omega a+\sin\omega b=2$，则$\omega$的取值范围是___

8. 对四位数$\overline{abcd}(1\le a\le 9,0\le b,c,d\le 9)$，若$a>b,b<c,c>d$，则称$\overline{abcd}$为$P$类数，若$a<b,b>c,c<d$，则称$\overline{abcd}$为$Q$类数，用$N(P),N(Q)$分别表示$P$类数与$Q$类数的个数，则$N(P)-N(Q)$的值为________________

二、解答题：本大题共3小题，满分56分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

9.（本题满分16分）若实数a,b,c满足$2^a+4^b=2^c,4^a+2^b=4^c$，求c的最小值.

10.（本题满分20分）设a_1,a_2,a_3,a_4是4个有理数，使得

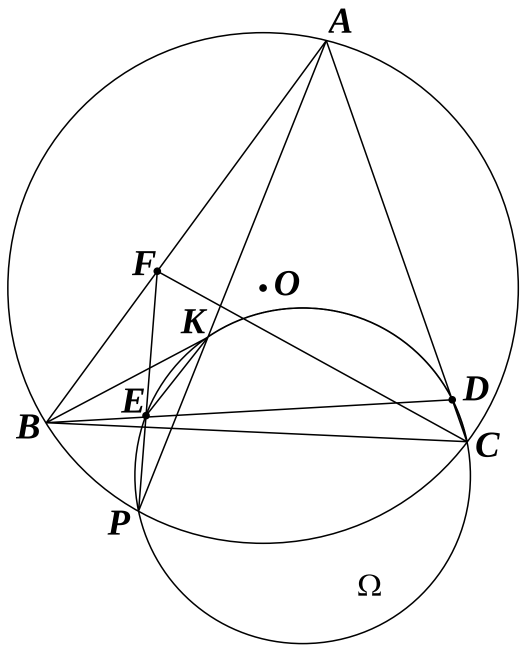
$$\left\{a_ia_j\middle|1\le i<j\le 4\right\}=\left\{-24,-2,-\frac{3}{2},-\frac{1}{8},1,3\right\}$$，求$a_1+a_2+a_3+a_4$的值.

11.（本题满分20分）在平面直角坐标系xOy中，F_1,F_2分别是椭圆$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的左、右焦点，设不经过焦点F_1的直线l与椭圆交于两个不同的点A,B，焦点F_2到直线l的距离为d，如果直线AF_1,l,BF_1的斜率依次成等差数列，求d的取值范围.

一、（本题满分 40 分）设 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geq 2)$ 是实数，证明：可以选取 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\in\{1,-1\}$，使得 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i a_i\right)^2\leq(n+1)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\ 2}\right)$.

二、（本题满分 40 分）设 $S=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，其中 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个互不相同的有限集合（$n\geq 2$），满足对任意的 $A_i,A_j\in S$，均有 $A_i\cup A_j\in S$，若 $k=\min\limits_{1\leq i\leq n}|A_i|\geq 2$. 证明：存在 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，使得 x 属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的至少 $\dfrac{n}{k}$ 个集合（这里 $|X|$ 表示有限集合 X 的元素个数）.

三、（本题满分 50 分）如图，ΔABC 内接于圆 O，P 为 $\overset{\frown}{BC}$ 上一点，点 K 在线段 AP 上，使得 BK 平分 $\angle ABC$，过 K,P,C 三点的圆 Ω 与边 AC 交于 D，连接 BD 交圆 Ω 于点 E，连接 PE 并延长与边 AB 交于点 F. 证明：$\angle ABC=2\angle FCB$.（解题时请将图画在答卷纸上）



四、（本题满分 50 分）求具有下述性质的所有正整数 k：

对任意正整数 n，$2^{(k-1)n+1}$ 不整除 $\dfrac{(kn)!}{n!}$.

2014 全国高中数学联赛试题

一、填空题

1、若正数a,b $2+\log_2 a=3+\log_3 b=\log(a+b)$,则$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$的值为__________

2、设集合$\{\dfrac{3}{a}+b\,|\,1\le a\le b\le 2\}$中的最大值与最小值分别为$M,m$，则$M-m$=_________

3、若函数$f(x)=x^2+a|x-1|$在$[0,+\infty)$上单调递增，则a的取值范围为_______

4、数列$\{a_n\}$满足$a_1=2, a_{n+1}=\dfrac{2(n+2)}{n+1}a_n(n\in N^{\cdot})$，则$\dfrac{a_{2014}}{a_1+a_2+...+a_{2013}}$=_________

5、已知正四棱锥$P-ABCD$中，侧面是边长为 1 的正三角形，M,N分别是边AB,BC的中点，则异面直线MN与PC之间的距离是_____________

6、设椭圆Γ的两个焦点是F_1,F_2，过点F_1的直线与Γ交于点P,Q，若$|PF_2|=|F_1F_2|$，且$3|PF_1|=4|QF_1|$，则椭圆Γ的短轴与长轴的比值为__________

7、设等边三角形ABC的内切圆半径为 2，圆心为I。若点P满足$PI=1$，则ΔABC与ΔAPC的面积之比的最大值为__________

8、设A,B,C,D是空间四个不共面的点，以$\dfrac{1}{2}$的概率在每对点之间连一条边，任意两点之间是否连边是相互独立的，则A,B可用（一条边或者若干条边组成的）空间折线连接的概率是__________

二、解答题

9、平面直角坐标系xOy中，P是不在x轴上一个动点，满足条件：过P可作抛物线$y^2=4x$的两条切线，两切点连线l_P与PO垂直。设直线l_P与PO，x轴的交点分别为Q,R，

（1）证明：R是一个顶点

（2）球$\dfrac{|PQ|}{|QR|}$的最小值

10、数 列 $\{a_n\}$ 满 足 $a_1=\frac{\pi}{6}, a_{n+1}=\arctan(\sec a_n)(n\in N^*)$ 求 正 整 数 m ， 使 得 $\sin a_1 \sin a_2 ......\sin a_m=\frac{1}{100}$

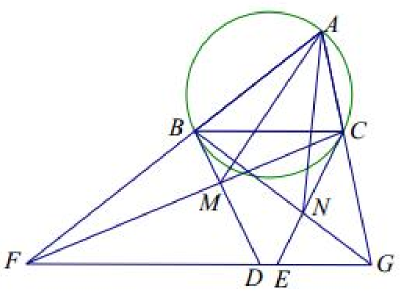
11、确定所有的复数 α ，使得对任意的复数 z_1, z_2 （$|z_1|,|z_2|<1, z_1\neq z_2$），均有 $(z_1+\alpha)^2+\alpha\overline{z_1}\neq(z_1+\alpha)^2+\alpha\overline{z_2}$

2014全国高中数学联赛二试

一、（本题满分40分）设$a,b,c\in R$，满足$a+b+c=1$，$abc>0$，

求证：$bc+ca+ab<\dfrac{\sqrt{abc}}{2}+\dfrac{1}{4}$

二、（本题满分40分）如图，在锐角三角形ABC中，$\angle BAC\neq 60^\circ$，过点B,C分别作三角形ABC的外接圆的切线BD,CE，且满足$BD=CE=BC$．直线DE与AB,AC的延长线分别交于点F,G．设CF与BD交于点M，CE与BG交于点N．证明：$AM=AN$．



三、（本题满分 50 分） 设 $S=\{1,2,3,\cdots,100\}$．求最大的整数 k，使得 S 有 k 个互不相同的非空子集，具有性质：对这 k 个子集中任意两个不同子集，若它们的交非空，则它们交集中的最小元素与这两个子集中的最大元素均不相同.

四、（本题满分 50 分） 设整数 $x_1,x_2,\cdots,x_{2014}$ 模 2014 互不同余， 整数 $y_1,y_2,\cdots,y_{2014}$ 模 2014 也互不同余．证明：可将 $y_1,y_2,\cdots,y_{2014}$ 重新排列为 $z_1,z_2,\cdots,z_{2014}$， 使得

$$x_1+z_1,\ x_2+z_2,\ \cdots,\ x_{2014}+z_{2014}$$

模 4028 互不同余.

2014年全国高中数学联合竞赛一试（A卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不要增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不要增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分.

1. 若正数 a, b 满足 $2+\log_2 a=3+\log_3 b=\log_6(a+b)$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的值为__________.

答案： 108.

解： 设 $2+\log_2 a=3+\log_3 b=\log_6(a+b)=k$，则 $a=2^{k-2}$, $b=3^{k-3}$, $a+b=6^k$，从而 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{6^k}{2^{k-2}\times 3^{k-3}}=2^2\times 3^3=108$.

2. 设集合 $\left\{\dfrac{3}{a}+b \,\middle|\, 1\le a\le b\le 2\right\}$ 中的最大元素与最小元素分别为 M, m，则 $M-m$ 的值为________.

答案： $5-2\sqrt{3}$.

解： 由 $1\le a\le b\le 2$ 知，$\dfrac{3}{a}+b\le\dfrac{3}{1}+2=5$，当 $a=1, b=2$ 时，得最大元素 $M=5$. 又 $\dfrac{3}{a}+b\ge\dfrac{3}{a}+a\ge 2\sqrt{\dfrac{3}{a}\cdot a}=2\sqrt{3}$，当 $a=b=\sqrt{3}$ 时，得最小元素 $m=2\sqrt{3}$.

因此，$M-m=5-2\sqrt{3}$.

3. 若函数 $f(x)=x^2+a|x-1|$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是____.

答案： $[-2, 0]$.

解： 在 $[1,+\infty)$ 上，$f(x)=x^2+ax-a$ 单调递增，等价于 $-\dfrac{a}{2}\le 1$，即 $a\ge -2$. 在 $[0, 1]$ 上，$f(x)=x^2-ax+a$ 单调递增，等价于 $\dfrac{a}{2}\le 0$，即 $a\le 0$.

因此实数 a 的取值范围是 $[-2, 0]$.

4. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{2(n+2)}{n+1}a_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，则 $\dfrac{a_{2014}}{a_1+a_2+\cdots+a_{2013}}=$______.

答案： $\dfrac{2015}{2013}$.

解： 由题设
$$a_n=\frac{2(n+1)}{n}a_{n-1}=\frac{2(n+1)}{n}\cdot\frac{2n}{n-1}a_{n-2}=\cdots$$
$$=\frac{2(n+1)}{n}\cdot\frac{2n}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2\cdot 3}{2}a_1=2^{n-1}(n+1).$$

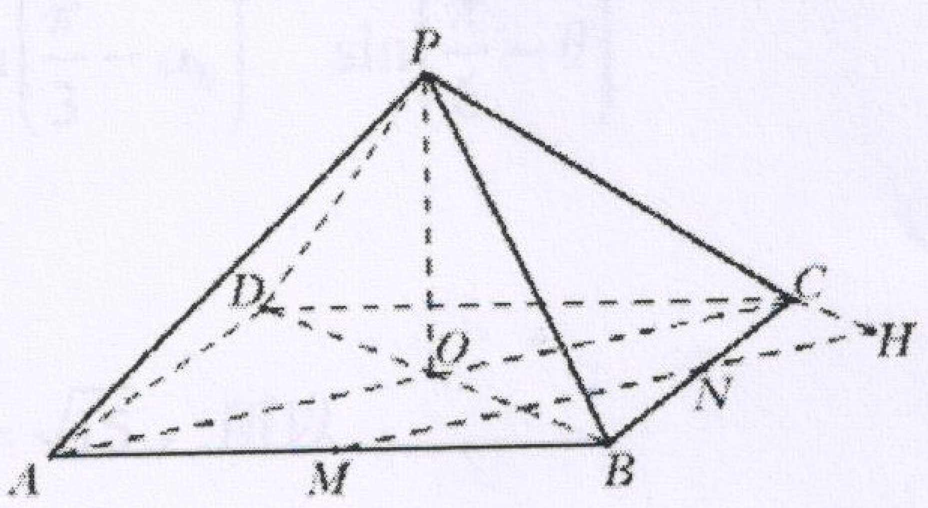
记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则
$$S_n=2+2\times 3+2^2\times 4+\cdots+2^{n-1}(n+1),$$
所以
$$2S_n=2\times 2+2^2\times 3+2^3\times 4+\cdots+2^n(n+1),$$

将上面两式相减，得 $\qquad S_n=2^n(n+1)-(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+2)$

$$=2^n(n+1)-2^n=2^n n.$$

故 $\dfrac{a_{2014}}{a_1+a_2+\cdots+a_{2013}}=\dfrac{2^{2013}\times 2015}{2^{2013}\times 2013}=\dfrac{2015}{2013}$.

5. 正四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面是边长为 1 的正三角形，M, N 分别是边 AB, BC 的中点，则异面直线 MN 与 PC 之间的距离是________.



答案： $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

解： 设底面对角线 AC, BD 交于点 O，过点 C 作直线 MN 的垂线，交 MN 于点 H.

由于 PO 是底面的垂线，故 $PO\perp CH$，又 $AC\perp CH$，所以 CH 与平面 POC 垂直，故 $CH\perp PC$.

因此 CH 是直线 MN 与 PC 的公垂线段，又 $CH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CN=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，故异面直线 MN 与 PC 之间的距离是 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

6. 设椭圆 Γ 的两个焦点是 F_1, F_2，过点 F_1 的直线与 Γ 交于点 P, Q. 若 $|PF_2|=|F_1F_2|$，且 $3|PF_1|=4|QF_1|$，则椭圆 Γ 的短轴与长轴的比值为________.

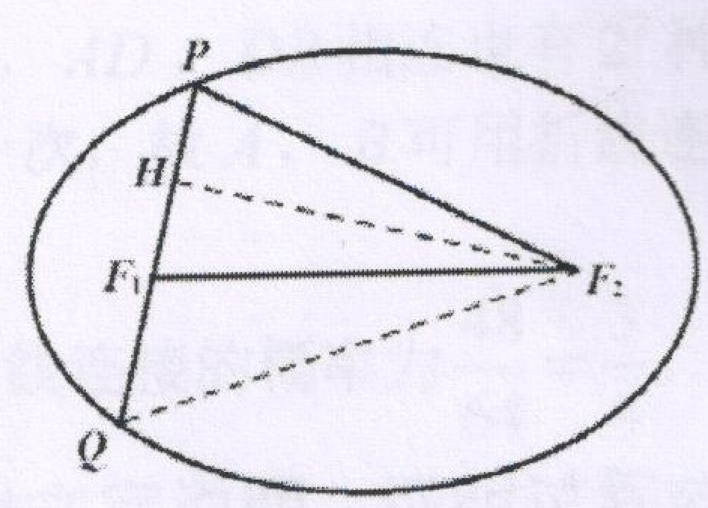
答案： $\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$.

解： 不妨设 $|PF_1|=4, |QF_1|=3$. 记椭圆 Γ 的长轴，短轴的长度分别为 $2a$，$2b$，焦距为 $2c$，则 $|PF_2|=|F_1F_2|=2c$，且由椭圆的定义知，

$$2a=|QF_1|+|QF_2|=|PF_1|+|PF_2|=2c+4.$$

于是 $\qquad |QF_2|=|PF_1|+|PF_2|-|QF_1|=2c+1.$

设 H 为线段 PF_1 的中点，则 $|F_1H|=2, |QH|=5$，且有 $F_2H\perp PF_1$. 由勾股定理知，



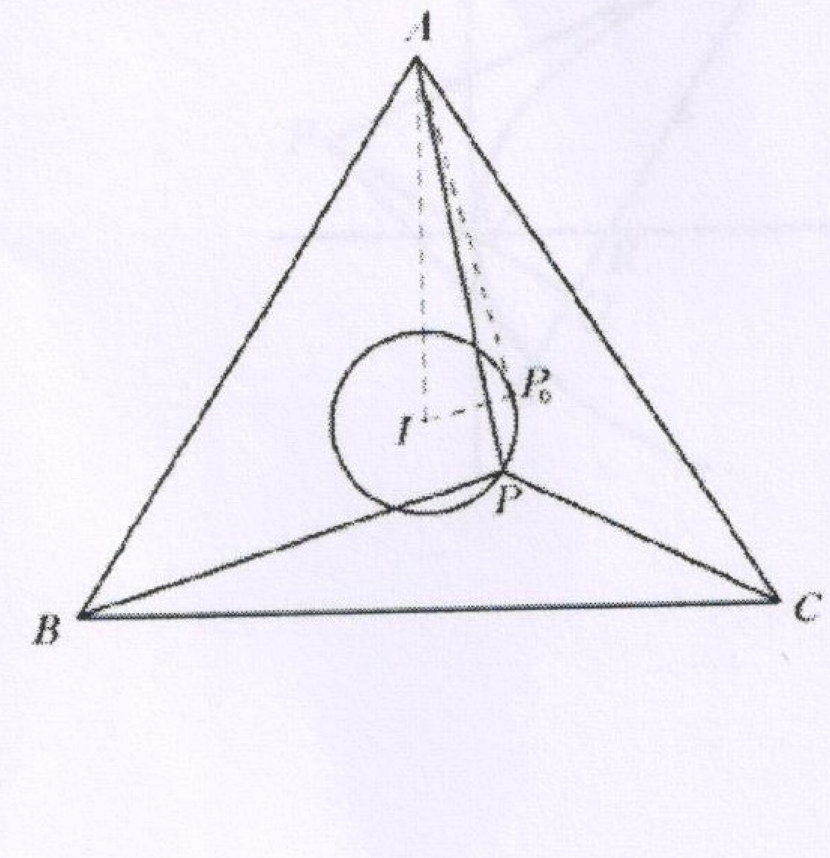
$$|QF_2|^2-|QH|^2=|F_2H|^2=|F_1F_2|^2-|F_1H|^2,$$

即 $(2c+1)^2-5^2=(2c)^2-2^2$，解得 $c=5$，进而 $a=7$，$b=2\sqrt{6}$，因此椭圆 Γ 的短轴与长轴的比值为 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$.

7. 设等边三角形 ABC 的内切圆半径为 2，圆心为 I. 若点 P 满足 $PI=1$，则 $\triangle APB$ 与 $\triangle APC$ 的面积之比的最大值为________.

答案： $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

解： 由 $PI=1$ 知点 P 在以 I 为圆心的单位圆 K 上.



设$\angle BAP=\alpha$．在圆K上取一点P_0，使得α取到最大值α_0，此时P_0应落在$\angle IAC$内，且是AP_0与圆K的切点．由于$0<\alpha\le\alpha_0<\frac{\pi}{3}$，故

$$\frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle APC}}=\frac{\frac{1}{2}AP\cdot AB\cdot\sin\alpha}{\frac{1}{2}AP\cdot AC\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}\le\frac{\sin\alpha_0}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha_0\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)},\qquad①$$

其中，$\theta=\alpha_0-\frac{\pi}{6}=\angle IAP_0$．

由$\angle AP_0I=\frac{\pi}{2}$知，$\sin\theta=\frac{IP_0}{AI}=\frac{1}{2r}=\frac{1}{4}$，于是$\cot\theta=\sqrt{15}$，所以

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}=\frac{\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta}{\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta}=\frac{\cot\theta+\sqrt{3}}{\cot\theta-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{\sqrt{15}-\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.\qquad②$$

根据①、②可知，当$P=P_0$时，$\frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle APC}}$的最大值为$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$．

8. 设A，B，C，D是空间四个不共面的点，以$\frac{1}{2}$的概率在每对点之间连一条边，任意两对点之间是否连边是相互独立的，则A，B可用（一条边或者若干条边组成的）空间折线连接的概率为__________．

答案：$\frac{3}{4}$．

解：每对点之间是否连边有2种可能，共有$2^6=64$种情况．考虑其中A，B可用折线连接的情况数．

(1) 有AB边：共$2^5=32$种情况．

(2) 无AB边，但有CD边：此时A，B可用折线连接当且仅当A与C，D中至少一点相连，且B与C，D中至少一点相连，这样的情况数为$(2^2-1)\times(2^2-1)=9$．

(3) 无AB边，也无CD边：此时AC，CB相连有2^2种情况，AD，DB相连也有2^2种情况，但其中AC，CB，AD，DB均相连的情况被重复计了一次，故A，B可用折线连接的情况数为$2^2+2^2-1=7$．

以上三类情况数的总和为$32+9+7=48$，故A，B可用折线连接的概率为$\frac{48}{64}=\frac{3}{4}$．

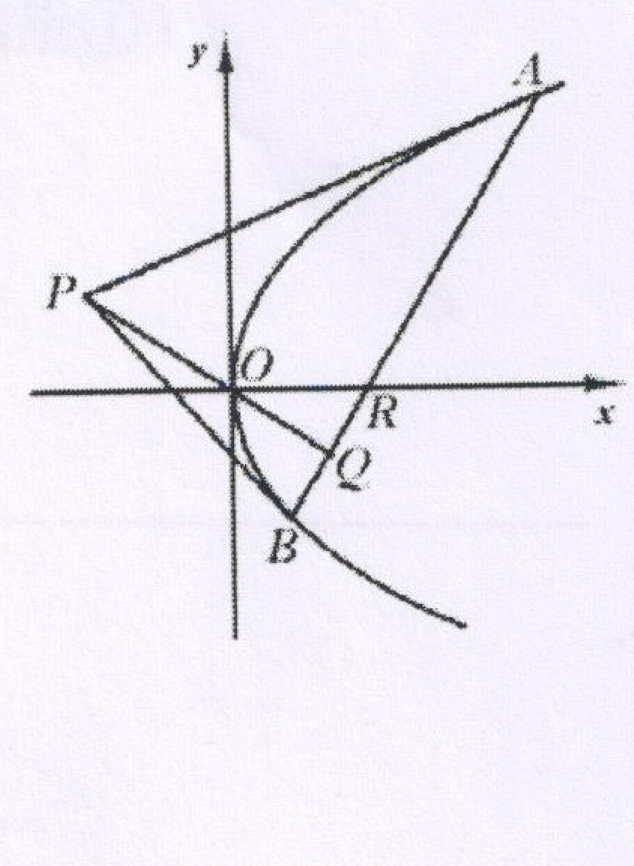
二、解答题：本大题共3小题，共56分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（本题满分16分）平面直角坐标系xOy中，P是不在x轴上的一个动点，满足条件：过P可作抛物线$y^2=4x$的两条切线，两切点连线l_P与PO垂直．

设直线l_P与直线PO，x轴的交点分别为Q，R．

(1) 证明R是一个定点；

(2) 求$\frac{|PQ|}{|QR|}$的最小值．



解：(1) 设 P 点的坐标为 $(a, b)\,(b\neq 0)$，易知 $a\neq 0$．记两切点 A，B 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$，则 PA，PB 的方程分别为

$$yy_1 = 2(x+x_1)\,, \quad ①$$

$$yy_2 = 2(x+x_2)\,, \quad ②$$

而点 P 的坐标 (a, b) 同时满足①，②，故 A，B 的坐标 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 均满足方程

$$by = 2(x+a)\,. \quad ③$$

故③就是直线 AB 的方程．

直线 PO 与 AB 的斜率分别为 $\dfrac{b}{a}$ 与 $\dfrac{2}{b}$，由 $PO\perp AB$ 知，$\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{2}{b}=-1$，故 $a=-2$．

从而③即为 $y=\dfrac{2}{b}(x-2)$，故 AB 与 x 轴的交点 R 是定点 $(2, 0)$．

(2) 因为 $a=-2$，故直线 PO 的斜率 $k_1=-\dfrac{b}{2}$，直线 PR 的斜率 $k_2=-\dfrac{b}{4}$．设 $\angle OPR=\alpha$，则 α 为锐角，且

$$\frac{|PQ|}{|QR|}=\frac{1}{\tan\alpha}=\left|\frac{1+k_1k_2}{k_1-k_2}\right|=\left|\frac{1+\left(-\frac{b}{2}\right)\left(-\frac{b}{4}\right)}{-\frac{b}{2}+\frac{b}{4}}\right|=\frac{8+b^2}{2|b|}\geq\frac{2\sqrt{8\cdot b^2}}{2|b|}=2\sqrt{2}\,.$$

当 $b=\pm 2\sqrt{2}$ 时，$\dfrac{|PQ|}{|QR|}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$．

10.（本题满分 20 分）数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{\pi}{6}$，$a_{n+1}=\arctan(\sec a_n)\,(n\in\mathbf{N}^*)$．求正整数 m，使得

$$\sin a_1\cdot\sin a_2\cdot\cdots\cdot\sin a_m=\frac{1}{100}\,.$$

解：由已知条件可知，对任意正整数 n，$a_{n+1}\in\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$，且

$$\tan a_{n+1}=\sec a_n\,. \quad ①$$

由于 $\sec a_n>0$，故 $a_{n+1}\in\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$．由①得，$\tan^2 a_{n+1}=\sec^2 a_n=1+\tan^2 a_n$，故

$$\tan^2 a_n=n-1+\tan^2 a_1=n-1+\frac{1}{3}=\frac{3n-2}{3}\,,$$

即 $\tan a_n=\sqrt{\dfrac{3n-2}{3}}$．

因此

$$\begin{aligned}\sin a_1\cdot\sin a_2\cdot\cdots\cdot\sin a_m&=\frac{\tan a_1}{\sec a_1}\cdot\frac{\tan a_2}{\sec a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{\tan a_m}{\sec a_m}\\&=\frac{\tan a_1}{\tan a_2}\cdot\frac{\tan a_2}{\tan a_3}\cdot\cdots\cdot\frac{\tan a_m}{\tan a_{m+1}}\quad（利用①）\\&=\frac{\tan a_1}{\tan a_{m+1}}=\sqrt{\frac{1}{3m+1}}\,.\end{aligned}$$

由 $\sqrt{\dfrac{1}{3m+1}}=\dfrac{1}{100}$，得 $m=3333$．

11.（本题满分 20 分）确定所有的复数 α，使得对任意复数 $z_1, z_2\ (|z_1|, |z_2|<1,\ z_1 \neq z_2)$，均有

$$(z_1+\alpha)^2+\alpha\overline{z_1} \neq (z_2+\alpha)^2+\alpha\overline{z_2}.$$

解：记 $f_\alpha(z)=(z+\alpha)^2+\alpha\overline{z}$．则

$$\begin{aligned} f_\alpha(z_1)-f_\alpha(z_2) &= (z_1+\alpha)^2+\alpha\overline{z_1}-(z_2+\alpha)^2-\alpha\overline{z_2} \\ &= (z_1+z_2+2\alpha)(z_1-z_2)+\alpha\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right). \end{aligned} \qquad ①$$

假如存在复数 $z_1, z_2\ (|z_1|, |z_2|<1,\ z_1 \neq z_2)$，使得 $f_\alpha(z_1)=f_\alpha(z_2)$，则由①知，

$$\left|\alpha\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)\right|=\left|-(z_1+z_2+2\alpha)(z_1-z_2)\right|,$$

利用 $\left|\overline{z_1}-\overline{z_2}\right|=\left|\overline{z_1-z_2}\right|=|z_1-z_2|\neq 0$ 知，$|\alpha|=|z_1+z_2+2\alpha|\geq 2|\alpha|-|z_1|-|z_2|>2|\alpha|-2$，即 $|\alpha|<2$．

另一方面，对任意满足 $|\alpha|<2$ 的复数 α，令 $z_1=-\dfrac{\alpha}{2}+\beta\mathrm{i},\ z_2=-\dfrac{\alpha}{2}-\beta\mathrm{i}$，其中 $0<\beta<1-\dfrac{|\alpha|}{2}$，则 $z_1\neq z_2$，而 $\left|-\dfrac{\alpha}{2}\pm\beta\mathrm{i}\right|\leq\left|-\dfrac{\alpha}{2}\right|+|\beta|<1$，故 $|z_1|, |z_2|<1$．此时将

$$z_1+z_2=-\alpha,\quad z_1-z_2=2\beta\mathrm{i},\quad \overline{z_1}-\overline{z_2}=\overline{2\beta\mathrm{i}}=-2\beta\mathrm{i}$$

代入①可得，$f_\alpha(z_1)-f_\alpha(z_2)=\alpha\cdot 2\beta\mathrm{i}+\alpha\cdot(-2\beta\mathrm{i})=0$，即 $f_\alpha(z_1)=f_\alpha(z_2)$．

综上所述，符合要求的 α 的值为 $\{\alpha \mid \alpha\in\mathbf{C}, |\alpha|\geq 2\}$．

2014年全国高中数学联合竞赛加试（A卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10分为一个档次，不要增加其他中间档次.

一、（本题满分40分） 设实数 a,b,c 满足 $a+b+c=1$， $abc>0$. 求证：

$$ab+bc+ca<\frac{\sqrt{abc}}{2}+\frac{1}{4}.$$

证明1 若 $ab+bc+ca\le\frac{1}{4}$，则命题已成立.

若 $ab+bc+ca>\frac{1}{4}$，不妨设 $a=\max\{a,b,c\}$，则由 $a+b+c=1$ 知 $a\ge\frac{1}{3}$. 我们有

$$ab+bc+ca-\frac{1}{4}\le\frac{(a+b+c)^2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\le\frac{a}{4}, \quad ①$$

以及
$$ab+bc+ca-\frac{1}{4}=a(b+c)-\frac{1}{4}+bc$$

$$=a(1-a)-\frac{1}{4}+bc\le\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+bc=bc, \quad ②$$

其中①式等号在 $a=\frac{1}{3}$ 时成立，②式等号在 $a=\frac{1}{2}$ 时成立，因此①，②中等号不能同时成立.

由于 $ab+bc+ca-\frac{1}{4}>0$，将①，②式相乘得

$$\left(ab+bc+ca-\frac{1}{4}\right)^2<\frac{abc}{4},$$

即
$$ab+bc+ca-\frac{1}{4}<\frac{\sqrt{abc}}{2},$$

从而
$$ab+bc+ca<\frac{\sqrt{abc}}{2}+\frac{1}{4}.$$

证明 2 由于$abc>0$，故a,b,c中或者一个正数，两个负数；或者三个都是正数. 对于前一种情形，不妨设$a>0$，$b,c<0$，则
$$ab+bc+ca=b(a+c)+ca<b(a+c)=b(1-b)<0,$$
结论显然成立.

下面假设$a,b,c>0$，不妨设$a\ge b\ge c$，则$a\ge\frac{1}{3}$，$0<c\le\frac{1}{3}$. 我们有
$$ab+bc+ca-\frac{\sqrt{abc}}{2}=c(a+b)+\sqrt{ab}\left(\sqrt{ab}-\frac{\sqrt{c}}{2}\right)$$
$$=c(1-c)+\sqrt{ab}\left(\sqrt{ab}-\frac{\sqrt{c}}{2}\right).$$

由于$\sqrt{ab}\ge\sqrt{\frac{b}{3}}\ge\sqrt{\frac{c}{3}}>\frac{\sqrt{c}}{2}$，且$\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}=\frac{1-c}{2}$，因此
$$c(1-c)+\sqrt{ab}\left(\sqrt{ab}-\frac{\sqrt{c}}{2}\right)\le c(1-c)+\frac{1-c}{2}\left(\frac{1-c}{2}-\frac{\sqrt{c}}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{3c^2}{4}+\frac{c\sqrt{c}}{4}+\frac{c}{2}-\frac{\sqrt{c}}{4}.$$

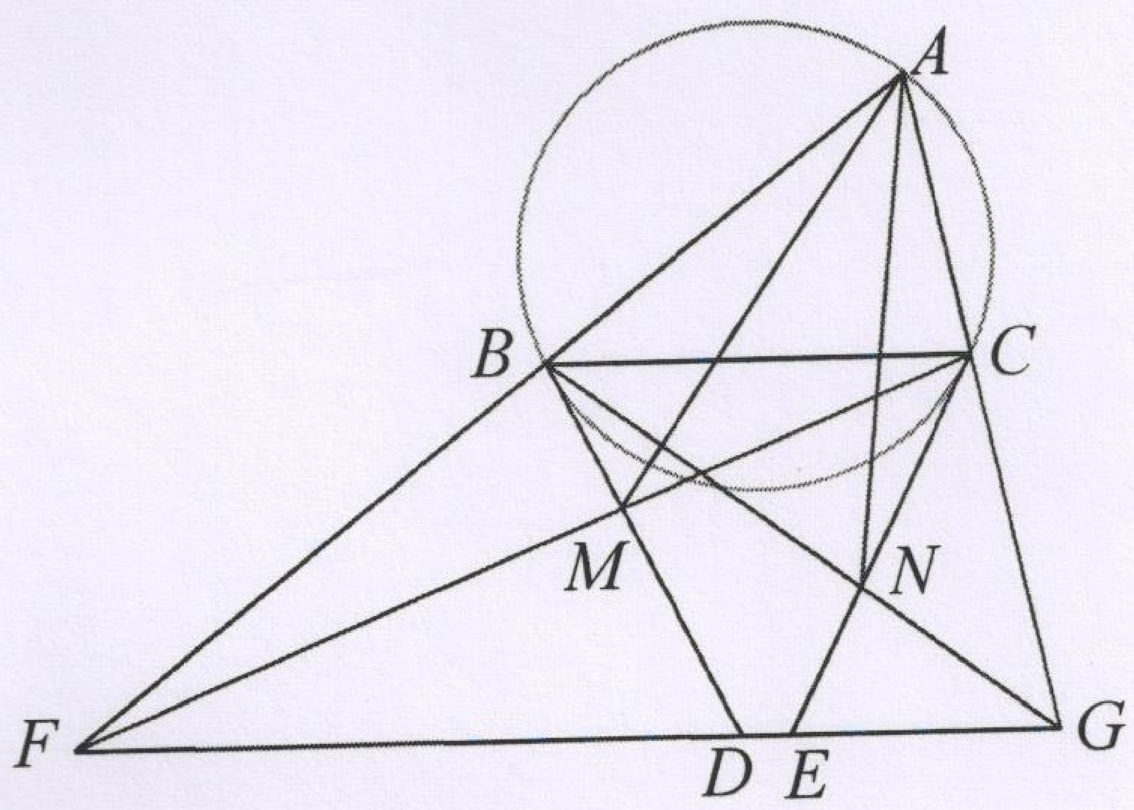
于是只需证明$\frac{3c^2}{4}-\frac{c\sqrt{c}}{4}-\frac{c}{2}+\frac{\sqrt{c}}{4}>0$，即
$$3c\sqrt{c}-c-2\sqrt{c}+1>0. \qquad ①$$

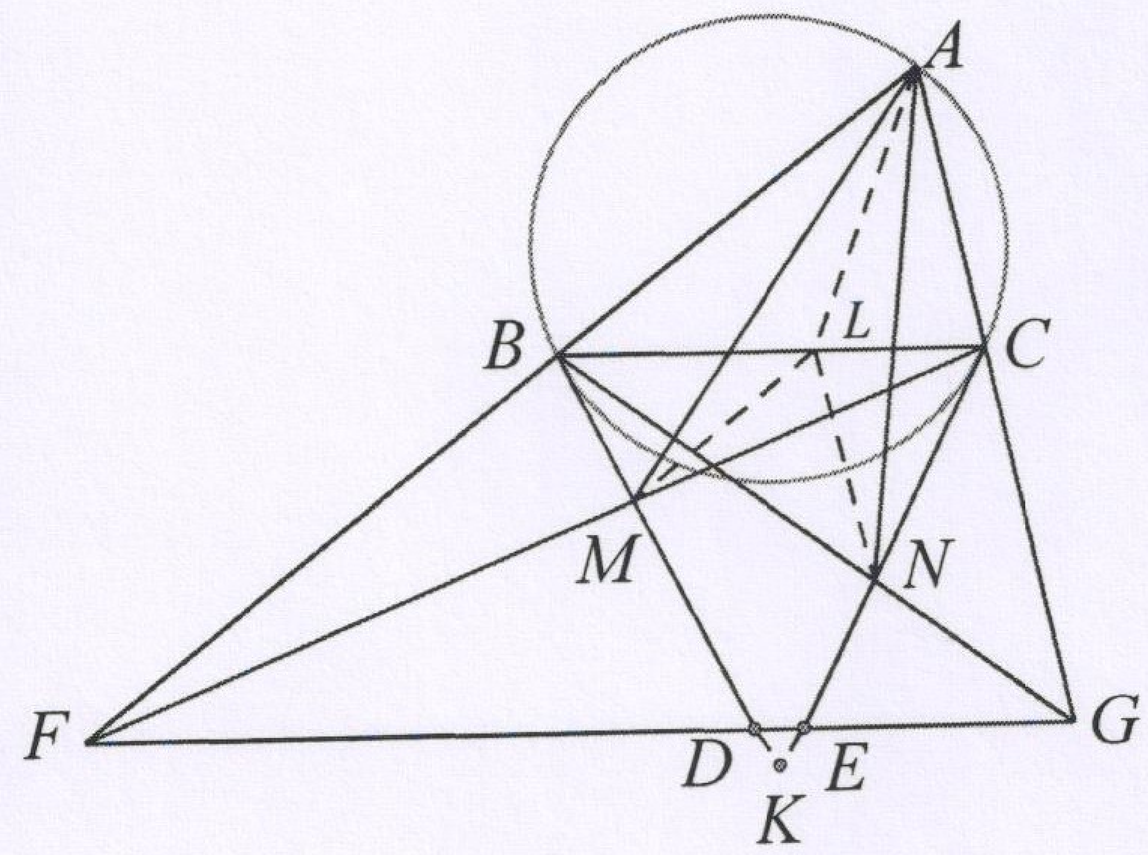
由于$0<c\le\frac{1}{3}$，故
$$\frac{1}{3}-c\ge 0. \qquad ②$$

由平均不等式
$$3c\sqrt{c}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ge 3\left(3c\sqrt{c}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{9}\sqrt{c}>2\sqrt{c}. \qquad ③$$

将②，③两式相加即得①式成立，因此原不等式成立.

二、（本题满分 40 分） 如图，在锐角三角形 ABC 中，$\angle BAC \neq 60°$，过点 B,C 分别作三角形 ABC 的外接圆的切线 BD,CE，且满足 $BD = CE = BC$．直线 DE 与 AB,AC 的延长线分别交于点 F,G．设 CF 与 BD 交于点 M，CE 与 BG 交于点 N．证明：$AM = AN$．





证明 1 如图，设两条切线 BD,CE 交于点 K，则 $BK = CK$．结合 $BD = CE$ 可知 $DE \parallel BC$．作 $\angle BAC$ 的平分线 AL 交 BC 于点 L，连接 LM,LN．

由 $DE \parallel BC$ 知，$\angle ABC = \angle DFB$，$\angle FDB = \angle DBC = \angle BAC$，故 ΔABC 与 ΔDFB 相似.

由此并结合 $DE \parallel BC$，$BD = BC$ 及内角平分线定理可得

$$\frac{MC}{MF} = \frac{BC}{FD} = \frac{BD}{FD} = \frac{AC}{AB} = \frac{LC}{LB},$$

因此 $LM \parallel BF$．

同理，$LN \parallel CG$．由此推出

$$\angle ALM = \angle ALB + \angle BLM = \angle ALB + \angle ABL = 180^\circ - \angle BAL$$

$$= 180^\circ - \angle CAL = \angle ALC + \angle ACL = \angle ALC + \angle CLN$$

$$= \angle ALN .$$

再结合 $BC \parallel FG$ 以及内角平分线定理得到

$$\frac{LM}{LN} = \frac{LM}{BF} \cdot \frac{BF}{CG} \cdot \frac{CG}{LN} = \frac{CL}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BL} = \frac{CL}{BL} \cdot \frac{AB}{AC} = 1,$$

即 $LM = LN$.

故由 $AL = AL$，$\angle ALM = \angle ALN$，$LM = LN$ 得到 ΔALM 与 ΔALN 全等，因而 $AM = AN$，证毕.

证明 2 由于 BD 和 EC 都是 ω 的切线，故 $\angle DBC = \angle BAC = \angle ECB$. 再由 $BD = CE$，可得四边形 $BCED$ 是等腰梯形，从而 $DE \parallel BC$.

由于 $\angle BFD = \angle ABC = B$，$\angle FDB = \angle DBC = \angle BAC = A$，故 $\Delta DFB \backsim \Delta ABC$.

设三角形 ABC 的三内角分别为 A,B,C，三条边长分别为 $BC = a$，$CA = b$，$AB = c$. 由 $\Delta DFB \backsim \Delta ABC$ 有 $\dfrac{FD}{c} = \dfrac{BD}{b} = \dfrac{a}{b}$，可得 $FD = \dfrac{ac}{b}$.

由 $BC \parallel FD$，可得 $\dfrac{BM}{MD} = \dfrac{BC}{FD} = \dfrac{b}{c}$，故由 $BD = a$ 可得

$$BM = \frac{ab}{b+c}. \qquad ①$$

在三角形 ABM 中，$\angle ABM = B + A$，由余弦定理得

$$AM^2 = c^2 + \frac{a^2b^2}{(b+c)^2} - \frac{2abc}{b+c}\cos(A+B)$$

$$= c^2 + \frac{a^2b^2}{(b+c)^2} + \frac{2abc}{b+c}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$= \frac{1}{(b+c)^2}\left(c^2(b+c)^2 + a^2b^2 + c(a^2+b^2-c^2)(b+c)\right)$$

$$= \frac{1}{(b+c)^2}\left(b^2c^2 + 2bc^3 + c^4 + a^2b^2 + a^2bc + a^2c^2 + b^3c + b^2c^2 - bc^3 - c^4\right)$$

$$= \frac{1}{(b+c)^2}\left(2b^2c^2 + bc^3 + b^3c + a^2b^2 + a^2c^2 + a^2bc\right). \qquad ②$$

用同样方法计算 CN 和 AN^2 时，只需在上述 BM 与 AM^2 的表达式①，②中将 b,c 交换. 而由②可见 AM^2 的表达式关于 b,c 对称，因此 $AN^2 = AM^2$，即 $AM = AN$，结论获证.

三、（本题满分 50 分）设 $S=\{1,2,3,\cdots,100\}$. 求最大的整数 k，使得 S 有 k 个互不相同的非空子集，具有性质：对这 k 个子集中任意两个不同子集，若它们的交非空，则它们交集中的最小元素与这两个子集中的最大元素均不相同.

解 对有限非空实数集 A，用 $\min A$ 与 $\max A$ 分别表示 A 的最小元素与最大元素.考虑 S 的所有包含 1 且至少有两个元素的子集，一共 $2^{99}-1$ 个，它们显然满足要求，因为 $\min(A_i\cap A_j)=1<\max A_i$. 故 $k_{\max}\ge 2^{99}-1$.

下面证明 $k\ge 2^{99}$ 时不存在满足要求的 k 个子集. 我们用数学归纳法证明：对整数 $n\ge 3$，在集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的任意 $m(\ge 2^{n-1})$ 个不同非空子集 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中，存在两个子集 A_i,A_j，$i\ne j$，满足

$$A_i\cap A_j\ne\varnothing,\quad \text{且}\min(A_i\cap A_j)=\max A_i. \qquad ①$$

显然只需对 $m=2^{n-1}$ 的情形证明上述结论.

当 $n=3$ 时，将 $\{1,2,3\}$ 的全部 7 个非空子集分成 3 组，第一组：$\{3\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$；第二组：$\{2\}$，$\{1,2\}$；第三组：$\{1\}$，$\{1,2,3\}$. 由抽屉原理，任意 4 个非空子集必有两个在同一组中，取同组中的两个子集分别记为 A_i,A_j，排在前面的记为 A_i，则满足①.

假设结论在 $n(\ge 3)$ 时成立，考虑 $n+1$ 的情形. 若 $A_1,A_2,\cdots,A_{2^n}$ 中至少有 2^{n-1} 个子集不含 $n+1$，对其中的 2^{n-1} 个子集用归纳假设，可知存在两个子集满足①.

若至多有 $2^{n-1}-1$ 个子集不含 $n+1$，则至少有 $2^{n-1}+1$ 个子集含 $n+1$，将其中 $2^{n-1}+1$ 子集都去掉 $n+1$，得到 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的 $2^{n-1}+1$ 个子集.

由于 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的全体子集可分成 2^{n-1} 组，每组两个子集互补，故由抽屉原理，在上述 $2^{n-1}+1$ 个子集中一定有两个属于同一组，即互为补集. 因此，相应地有两个子集 A_i,A_j，满足 $A_i\cap A_j=\{n+1\}$，这两个集合显然满足①. 故 $n+1$ 时结论成立.

综上所述，所求 $k_{\max}=2^{99}-1$.

四、（本题满分 50 分）设整数 $x_1,x_2,\cdots,x_{2014}$ 模 2014 互不同余，整数 $y_1,y_2,\cdots,y_{2014}$ 模 2014 也互不同余．证明：可将 $y_1,y_2,\cdots,y_{2014}$ 重新排列为 $z_1,z_2,\cdots,z_{2014}$，使得

$$x_1+z_1,\ x_2+z_2,\ \cdots,\ x_{2014}+z_{2014}$$

模 4028 互不同余．

证明 记 $k=1007$．不妨设 $x_i\equiv y_i\equiv i \pmod{2k}$，$1\le i\le 2k$．对每个整数 i，$1\le i\le k$，若 $x_i+y_i\not\equiv x_{i+k}+y_{i+k} \pmod{4k}$，则令 $z_i=y_i$，$z_{i+k}=y_{i+k}$；否则，令 $z_i=y_{i+k}$，$z_{i+k}=y_i$．

如果是前一种情形，则

$$x_i+z_i=x_i+y_i\not\equiv x_{i+k}+y_{i+k}=x_{i+k}+z_{i+k} \pmod{4k}.$$

如果是后一种情形，则也有

$$x_i+z_i=x_i+y_{i+k}\not\equiv x_{i+k}+y_i=x_{i+k}+z_{i+k} \pmod{4k}.$$

若不然，我们有 $x_i+y_i\equiv x_{i+k}+y_{i+k} \pmod{4k}$，$x_i+y_{i+k}\equiv x_{i+k}+y_i \pmod{4k}$，两式相加可得 $2x_i\equiv 2x_{i+k} \pmod{4k}$，于是 $x_i\equiv x_{i+k} \pmod{2k}$，但 $x_1,x_2,\cdots,x_{2014}$ 模 $2014(=2k)$ 互不同余，特别地，$x_i\not\equiv x_{i+k}\pmod{2k}$，矛盾．

由上述构造方法知 $z_1,z_2,\cdots,z_{2k}$ 是 $y_1,y_2,\cdots,y_{2k}$ 的排列．记 $w_i=x_i+z_i$，$i=1,2,\cdots,2k$．下面验证 $w_1,w_2,\cdots,w_{2k}$ 模 $4k$ 互不同余．这只需证明，对任意整数 i,j，$1\le i<j\le k$，

$$w_i,w_j,w_{i+k},w_{j+k}\text{ 模 }4k\text{ 两两不同余}. \qquad (*)$$

注意，前面的构造方式已保证

$$w_i\not\equiv w_{i+k}\pmod{4k},\ w_j\not\equiv w_{j+k}\pmod{4k}. \qquad (**)$$

情形一：$z_i=y_i$，且 $z_j=y_j$．则由前面的构造方式可知

$$w_i\equiv w_{i+k}\equiv 2i \pmod{2k},\quad w_j\equiv w_{j+k}\equiv 2j \pmod{2k}.$$

由于 $2i\not\equiv 2j\pmod{2k}$，故易知 w_i 与 w_j 及 w_{j+k} 模 $2k$ 不同余，w_{i+k} 与 w_j 及 w_{j+k} 模 $2k$ 不同余，从而模 $4k$ 更不同余，再结合（**）可见（*）得证．

情形二：$z_i=y_{i+k}$，且 $z_j=y_{j+k}$．则由前面的构造方式可知

$$w_i \equiv w_{i+k} \equiv 2i+k \pmod{2k}, \quad w_j \equiv w_{j+k} \equiv 2j+k \pmod{2k}.$$

同样有 w_i 与 w_j 及 w_{j+k} 模 $2k$ 不同余，w_{i+k} 与 w_j 及 w_{j+k} 模 $2k$ 不同余.与情形一相同地可知（*）得证.

情形三：$z_i = y_i$，且 $z_j = y_{j+k}$（$z_i = y_{i+k}$，且 $z_j = y_j$ 的情形与此相同）. 则由前面的构造方式可知

$$w_i \equiv w_{i+k} \equiv 2i \pmod{2k}, \quad w_j \equiv w_{j+k} \equiv 2j+k \pmod{2k}.$$

由于 k 是奇数，故 $2i \not\equiv 2j+k \pmod{2}$，更有 $2i \not\equiv 2j+k \pmod{2k}$，因此仍然有 w_i 与 w_j 及 w_{j+k} 模 $2k$ 不同余，w_{i+k} 与 w_j 及 w_{j+k} 模 $2k$ 不同余. 从而（*）得证.

因此本题得证.

2013年全国高中数学联合竞赛一试试题

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，共64分.

1. 设集合 $A=\{2,0,1,3\}$，集合 $B=\{x\mid -x\in A,\ 2-x^2\notin A\}$. 则集合 B 中所有元素的和为______________.

2. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 A、B 在抛物线 $y^2=4x$ 上，满足 $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=-4$，$F$ 是抛物线的焦点. 则 $S_{\Delta OFA}\cdot S_{\Delta OFB}=$______________.

3. 在 ΔABC 中，已知 $\sin A=10\sin B\sin C,\ \cos A=10\cos B\cos C,$ 则 $\tan A$ 的值为__________.

4. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 底面边长为1，高为 $\sqrt{2}$，则其内切球半径为_____.

5. 设 $a,\ b$ 为实数，函数 $f(x)=ax+b$ 满足：对任意 $x\in[0,1]$，有 $|f(x)|\le 1$. 则 ab 的最大值为______________.

6. 从 $1,2,\cdots,20$ 中任取 5 个不同的数，其中至少有两个是相邻数的概率为__________.

7. 若实数 $x,\ y$ 满足 $x-4\sqrt{y}=2\sqrt{x-y}$，则 x 的取值范围是________________.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 共有 9 项，其中 $a_1=a_9=1$，且对每个 $i\in\{1,2,\cdots,8\}$，均有 $\dfrac{a_{i+1}}{a_i}\in\left\{2,1,-\dfrac{1}{2}\right\}$，则这样的数列的个数为______________.

二、解答题：本大题共3小题，共56分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本题满分 16 分）给定正数数列 $\{x_n\}$ 满足 $S_n\ge 2S_{n-1},n=2,3,\cdots$，这里 $S_n=x_1+\cdots+x_n$. 证明：存在常数 $C>0$，使得

$$x_n\ge C\cdot 2^n,\quad n=1,2,\cdots.$$

10.（本题满分 20 分）在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$A_1$、$A_2$ 分别为椭圆的左、右顶点，F_1、F_2 分别为椭圆的左、右焦点，P 为椭圆上不同于 A_1 和 A_2 的任意一点．若平面中两个点 Q、R 满足 $QA_1\perp PA_1$，$QA_2\perp PA_2$，$RF_1\perp PF_1$，$RF_2\perp PF_2$，试确定线段 QR 的长度与 b 的大小关系，并给出证明.

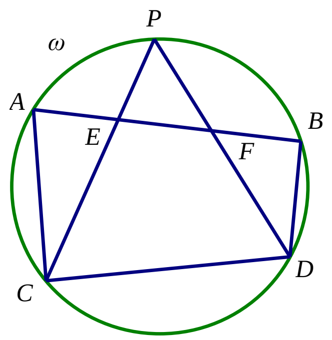
11.（本题满分 20 分）设函数 $f(x)=ax^2+b$，求所有的正实数对 (a,b)，使得对任意实数 $x,\ y$，有 $f(xy)+f(x+y)\ge f(x)f(y)$.

2013 年全国高中数学联合竞赛加试试题

一、（本题满分 40 分）如图，AB 是圆 ω 的一条弦，P 为弧 AB 内一点，E、F 为线段 AB 上两点，满足 $AE=EF=FB$．连接 PE、PF 并延长，与圆 ω 分别相交于点 C、D．求证：

$$EF\cdot CD=AC\cdot BD.$$

（解题时请将图画在答卷纸上）



二、（本题满分 40 分） 给定正整数 u，v．数列 $\{a_n\}$ 定义如下：$a_1=u+v$，对整数 $m\ge 1$，

$$\begin{cases} a_{2m}=a_m+u, \\ a_{2m+1}=a_m+v. \end{cases}$$

记 $S_m=a_1+a_2+\cdots+a_m\ (m=1,2,\cdots)$．证明：数列 $\{S_n\}$ 中有无穷多项是完全平方数．

三、（本题满分 50 分） 一次考试共有 m 道试题，n 个学生参加，其中 $m,\ n\ge 2$ 为给定的整数．每道题的得分规则是：若该题恰有 x 个学生没有答对，则每个答对该题的学生得 x 分，未答对的学生得零分．每个学生的总分为其 m 道题的得分总和．将所有学生总分从高到低排列为 $p_1\ge p_2\ge\cdots\ge p_n$，求 p_1+p_n 的最大可能值．

四、（本题满分 50 分） 设 $n,\ k$ 为大于 1 的整数，$n<2^k$．证明：存在 $2k$ 个不被 n 整除的整数，若将它们任意分成两组，则总有一组有若干个数的和被 n 整除．

2013年全国高中数学联合竞赛一试
试题参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设 **8** 分和 **0** 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不要增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 **9** 小题 **4** 分为一个档次，第 **10**、**11** 小题 **5** 分为一个档次，不要增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分.

1. 设集合 $A=\{2,0,1,3\}$，集合 $B=\{x\mid -x\in A,\ 2-x^2\notin A\}$. 则集合 B 中所有元素的和为____________.

答案 -5.

解 易知 $B\subseteq\{-2,0,-1,-3\}$. 当 $x=-2,-3$ 时，$2-x^2=-2,-7$，有 $2-x^2\notin A$；而当 $x=0,-1$ 时，$2-x^2=2,1$，有 $2-x^2\in A$. 因此，根据 B 的定义可知 $B=\{-2,-3\}$.

所以，集合 B 中所有元素的和为 -5.

2. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 A、B 在抛物线 $y^2=4x$ 上，满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-4$，$F$ 是抛物线的焦点. 则 $S_{\Delta OFA}\cdot S_{\Delta OFB}=$____________.

答案 2.

解 点 F 坐标为 $(1,0)$. 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1=\frac{y_1^2}{4},x_2=\frac{y_2^2}{4}$，故

$$-4=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{16}(y_1y_2)^2+y_1y_2,$$

即 $\frac{1}{16}(y_1y_2+8)^2=0$，故 $y_1y_2=-8$.

$$S_{\Delta OFA}\cdot S_{\Delta OFB}=(\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1|)\cdot(\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_2|)=\frac{1}{4}\cdot|OF|^2\cdot|y_1y_2|=2.$$

3. 在 ΔABC 中，已知 $\sin A=10\sin B\sin C,\cos A=10\cos B\cos C$，则 $\tan A$ 的值为__________.

答案 11.

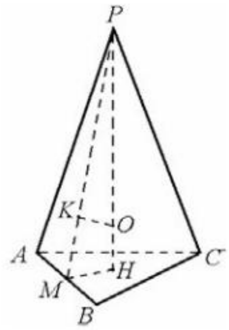
解 由于 $\sin A-\cos A=10(\sin B\sin C-\cos B\cos C)=-10\cos(B+C)=10\cos A$，所以 $\sin A=11\cos A$，故 $\tan A=11$.

4. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 底面边长为 1，高为 $\sqrt{2}$，则其内切球半径为_____.

答案 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

解 如图，设球心O在面ABC与面ABP内的射影分别为H和K，AB中点为M，内切球半径为r，则P、K、M共线，P、O、H共线，$\angle PHM=\angle PKO=\dfrac{\pi}{2}$，且

$$OH=OK=r,\ PO=PH-OH=\sqrt{2}-r,$$



$$MH=\frac{\sqrt{3}}{6}AB=\frac{\sqrt{3}}{6},\quad PM=\sqrt{MH^2+PH^2}=\sqrt{\frac{1}{12}+2}=\frac{5\sqrt{3}}{6},$$

于是有
$$\frac{r}{\sqrt{2}-r}=\frac{OK}{PO}=\sin\angle KPO=\frac{MH}{PM}=\frac{1}{5},$$

解得$r=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

5. 设a, b为实数，函数$f(x)=ax+b$满足：对任意$x\in[0, 1]$，有$|f(x)|\le 1$. 则ab的最大值为__________.

答案 $\dfrac{1}{4}$.

解 易知$a=f(1)-f(0), b=f(0)$，则

$$ab=f(0)\cdot(f(1)-f(0))=-\left(f(0)-\frac{1}{2}f(1)\right)^2+\frac{1}{4}\left(f(1)\right)^2\le\frac{1}{4}\left(f(1)\right)^2\le\frac{1}{4}.$$

当$2f(0)=f(1)=\pm1$，即$a=b=\pm\dfrac{1}{2}$时，$ab=\dfrac{1}{4}$. 故ab的最大值为$\dfrac{1}{4}$.

6. 从$1, 2, \cdots, 20$中任取 5 个不同的数，其中至少有两个是相邻数的概率为________.

答案 $\dfrac{232}{323}$.

解 设$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$取自 1,2，…，20，若a_1,a_2,a_3,a_4,a_5互不相邻，则

$$1\le a_1<a_2-1<a_3-2<a_4-3<a_5-4\le 16,$$

由此知从$1, 2, \cdots, 20$中取 5 个互不相邻的数的选法与从$1, 2, \cdots, 16$中取 5 个不同的数的选法相同，即C_{16}^5种. 所以，从$1, 2, \cdots, 20$中任取 5 个不同的数，其中至少有两个是相邻数的概率为

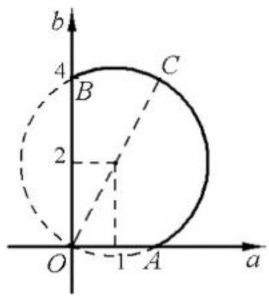
$$\frac{C_{20}^5-C_{16}^5}{C_{20}^5}=1-\frac{C_{16}^5}{C_{20}^5}=\frac{232}{323}.$$

7. 若实数 x, y 满足 $x-4\sqrt{y}=2\sqrt{x-y}$，则 x 的取值范围是____________.

答案 $\{0\}\cup[4, 20]$.

解 令 $\sqrt{y}=a, \sqrt{x-y}=b\ (a, b\geq 0)$，此时 $x=y+(x-y)=a^2+b^2$，且条件中等式化为 $a^2+b^2-4a=2b$，从而 a, b 满足方程

$$(a-2)^2+(b-1)^2=5\ (a, b\geq 0).$$



如图所示，在 aOb 平面内，点 (a, b) 的轨迹是以 $(1, 2)$ 为圆心，$\sqrt{5}$ 为半径的圆在 $a, b\geq 0$ 的部分，即点 O 与弧 $\overset{\frown}{ACB}$ 的并集. 因此 $\sqrt{a^2+b^2}\in\{0\}\cup\left[2, 2\sqrt{5}\right]$，从而 $x=a^2+b^2\in\{0\}\cup[4, 20]$.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 共有 9 项，其中 $a_1=a_9=1$，且对每个 $i\in\{1, 2, \cdots, 8\}$，均有 $\frac{a_{i+1}}{a_i}\in\left\{2, 1, -\frac{1}{2}\right\}$，则这样的数列的个数为____________.

答案 491.

解 令 $b_i=\frac{a_{i+1}}{a_i}\ (1\leq i\leq 8)$，则对每个符合条件的数列 $\{a_n\}$，有

$$\prod_{i=1}^{8}b_i=\prod_{i=1}^{8}\frac{a_{i+1}}{a_i}=\frac{a_9}{a_1}=1，且 b_i\in\left\{2, 1, -\frac{1}{2}\right\}(1\leq i\leq 8). \qquad ①$$

反之，由符合条件①的 8 项数列 $\{b_n\}$ 可唯一确定一个符合题设条件的 9 项数列 $\{a_n\}$.

记符合条件①的数列 $\{b_n\}$ 的个数为 N. 显然 $b_i\ (1\leq i\leq 8)$ 中有偶数个 $-\frac{1}{2}$，即 $2k$ 个 $-\frac{1}{2}$；继而有 $2k$ 个 2，$8-4k$ 个 1. 当给定 k 时，$\{b_n\}$ 的取法有 $\mathrm{C}_8^{2k}\mathrm{C}_{8-2k}^{2k}$ 种，易见 k 的可能值只有 $0, 1, 2$，所以

$$N=1+\mathrm{C}_8^2\mathrm{C}_6^2+\mathrm{C}_8^4\mathrm{C}_4^4=1+28\times 15+70\times 1=491.$$

因此，根据对应原理，符合条件的数列 $\{a_n\}$ 的个数为 491.

二、解答题：本大题共 3 小题，共 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（本题满分 16 分）给定正数数列$\{x_n\}$满足$S_n \ge 2S_{n-1}, n=2,3,\cdots$，这里$S_n = x_1+\cdots+x_n$．证明：存在常数$C>0$，使得

$$x_n \ge C\cdot 2^n,\ \ n=1,2,\cdots.$$

解　当$n\ge 2$时，$S_n \ge 2S_{n-1}$等价于

$$x_n \ge x_1+\cdots+x_{n-1}. \qquad ①$$

…………………4 分

对常数$C=\frac{1}{4}x_1$，用数学归纳法证明：

$$x_n \ge C\cdot 2^n,\ \ n=1,2,\cdots. \qquad ②$$

……………………8 分

$n=1$时结论显然成立．又$x_2 \ge x_1 = C\cdot 2^2$．

对$n\ge 3$，假设$x_k \ge C\cdot 2^k$，$k=1,2,\cdots,n-1$，则由①式知

$$\begin{aligned} x_n &\ge x_1+\left(x_2+\cdots+x_{n-1}\right)\\ &\ge x_1+\left(C\cdot 2^2+\cdots+C\cdot 2^{n-1}\right)\\ &= C\left(2^2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}\right)=C\cdot 2^n, \end{aligned}$$

所以，由数学归纳法知，②式成立．

…………………16 分

10.（本题满分 20 分）在平面直角坐标系xOy中，椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$A_1$、$A_2$分别为椭圆的左、右顶点，$F_1$、$F_2$分别为椭圆的左、右焦点，$P$为椭圆上不同于$A_1$和$A_2$的任意一点．若平面中两个点$Q$、$R$满足$QA_1\perp PA_1$，$QA_2\perp PA_2$，$RF_1\perp PF_1$，$RF_2\perp PF_2$，试确定线段$QR$的长度与$b$的大小关系，并给出证明．

解　令$c=\sqrt{a^2-b^2}$，则$A_1(-a,\ 0), A_2(a,\ 0), F_1(-c,\ 0), F_2(c,\ 0)$．

设$P(x_0,\ y_0), Q(x_1,\ y_1), R(x_2,\ y_2)$，其中$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1,\ y_0\ne 0$．

由$QA_1\perp PA_1, QA_2\perp PA_2$可知

$$\overrightarrow{A_1Q}\cdot\overrightarrow{A_1P}=(x_1+a)(x_0+a)+y_1y_0=0\text{，}\qquad ①$$

$$\overrightarrow{A_2Q}\cdot\overrightarrow{A_2P}=(x_1-a)(x_0-a)+y_1y_0=0\text{.}\qquad ②$$

…………………5 分

将①、②相减，得 $2a(x_1+x_0)=0$，即 $x_1=-x_0$，将其代入①，得 $-x_0^2+a^2+y_1y_0=0$，故 $y_1=\dfrac{x_0^2-a^2}{y_0}$，于是 $Q\left(-x_0,\ \dfrac{x_0^2-a^2}{y_0}\right)$. …………………10 分

根据 $RF_1\perp PF_1,\ RF_2\perp PF_2$，同理可得 $R\left(-x_0,\ \dfrac{x_0^2-c^2}{y_0}\right)$. …………………15 分

因此

$$|QR|=\left|\frac{x_0^2-a^2}{y_0}-\frac{x_0^2-c^2}{y_0}\right|=\frac{b^2}{|y_0|}\text{，}$$

由于 $|y_0|\in(0,\ b]$，故 $|QR|\geq b$（其中等号成立的充分必要条件是 $|y_0|=b$，即点 P 为 $(0,\ \pm b)$）. …………………20 分

11. （本题满分 20 分）求所有的正实数对 $(a,\ b)$，使得函数 $f(x)=ax^2+b$ 满足：对任意实数 $x,\ y$，有

$$f(xy)+f(x+y)\geq f(x)f(y)\text{.}$$

解　已知条件可转化为：对任意实数 $x,\ y$，有

$$(ax^2y^2+b)+(a(x+y)^2+b)\geq(ax^2+b)(ay^2+b)\text{.}\qquad ①$$

先寻找 $a,\ b$ 所满足的必要条件.

在①式中令 $y=0$，得 $b+(ax^2+b)\geq(ax^2+b)\cdot b$，即对任意实数 x，有

$$(1-b)ax^2+b(2-b)\geq 0\text{.}$$

由于 $a>0$，故 ax^2 可取到任意大的正值，因此必有 $1-b\geq 0$，即 $0<b\leq 1$.

…………………5 分

在①式中再令 $y=-x$，得 $(ax^4+b)+b\geq(ax^2+b)^2$，即对任意实数 x，有

$$(a-a^2)x^4-2abx^2+(2b-b^2)\geq 0\text{.}\qquad ②$$

将②的左边记为 $g(x)$．显然 $a-a^2\neq 0$（否则，由 $a>0$ 可知 $a=1$，此时 $g(x)=-2bx^2+(2b-b^2)$，其中 $b>0$，故 $g(x)$ 可取到负值，矛盾），于是

$$g(x)=(a-a^2)\left(x^2-\frac{ab}{a-a^2}\right)^2-\frac{(ab)^2}{a-a^2}+(2b-b^2)$$

$$=(a-a^2)\left(x^2-\frac{b}{1-a}\right)^2+\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geq 0$$

对一切实数 x 成立，从而必有 $a-a^2>0$，即 $0<a<1$．　　　　……………………10 分

进一步，考虑到此时 $\frac{b}{1-a}>0$，再根据 $g\left(\sqrt{\frac{b}{1-a}}\right)=\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geq 0$，可得 $2a+b\leq 2$．

至此，求得 a, b 满足的必要条件如下：

$$0<b\leq 1，\ 0<a<1，\ 2a+b\leq 2． \qquad ③$$

……………………15 分

下面证明，对满足③的任意实数对 (a, b) 以及任意实数 x, y，总有①成立，即

$$h(x, y)=(a-a^2)x^2y^2+a(1-b)(x^2+y^2)+2axy+(2b-b^2)$$

对任意 x, y 取非负值．

事实上，在③成立时，有 $a(1-b)\geq 0, a-a^2>0$，$\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geq 0$，再结合 $x^2+y^2\geq -2xy$，可得

$$h(x, y)\geq (a-a^2)x^2y^2+a(1-b)(-2xy)+2axy+(2b-b^2)$$

$$=(a-a^2)x^2y^2+2abxy+(2b-b^2)$$

$$=(a-a^2)\left(xy+\frac{b}{1-a}\right)^2+\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geq 0．$$

综上所述，所求的正实数对 (a, b) 全体为 $\{(a, b)|0<b\leq 1, 0<a<1, 2a+b\leq 2\}$．

……………………20 分

2013年全国高中数学联合竞赛加试
试题参考答案及评分标准

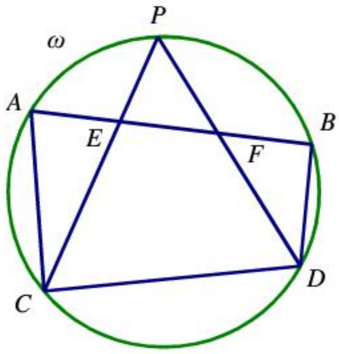
说明：

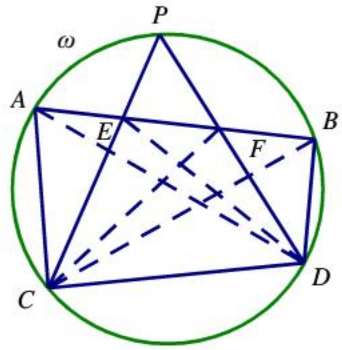
1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，**10** 分为一个档次，不要增加其他中间档次.

一、（本题满分 40 分）如图，AB 是圆 ω 的一条弦，P 为弧 AB 内一点，E、F 为线段 AB 上两点，满足 $AE=EF=FB$．连接 PE、PF 并延长，与圆 ω 分别相交于点 C、D．求证：

$$EF\cdot CD=AC\cdot BD.$$





证明　连接 AD，BC，CF，DE．由于 $AE=EF=FB$，从而

$$\frac{BC\cdot\sin\angle BCE}{AC\cdot\sin\angle ACE}=\frac{\text{点}B\text{到直线}CP\text{的距离}}{\text{点}A\text{到直线}CP\text{的距离}}=\frac{BE}{AE}=2. \qquad ①$$

……………………10 分

同样

$$\frac{AD\cdot\sin\angle ADF}{BD\cdot\sin\angle BDF}=\frac{\text{点}A\text{到直线}PD\text{的距离}}{\text{点}B\text{到直线}PD\text{的距离}}=\frac{AF}{BF}=2. \qquad ②$$

另一方面，由于

$$\angle BCE=\angle BCP=\angle BDP=\angle BDF,$$

$$\angle ACE=\angle ACP=\angle ADP=\angle ADF,$$

故将①，②两式相乘可得 $\dfrac{BC\cdot AD}{AC\cdot BD}=4$，即

$$BC\cdot AD=4AC\cdot BD. \qquad ③$$

……………………30 分

由托勒密定理

$$AD \cdot BC = AC \cdot BD + AB \cdot CD. \quad ④$$

故由③，④得 $$AB \cdot CD = 3AC \cdot BD,$$

即 $$EF \cdot CD = AC \cdot BD. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 40 \text{ 分}$$

二、（本题满分 40 分）给定正整数 u，v．数列 $\{a_n\}$ 定义如下：$a_1 = u + v$，对整数 $m \geq 1$，

$$\begin{cases} a_{2m} = a_m + u, \\ a_{2m+1} = a_m + v. \end{cases}$$

记 $S_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m \left(m = 1, 2, \cdots\right)$．证明：数列 $\{S_n\}$ 中有无穷多项是完全平方数．

证明　对正整数 n，有

$$\begin{aligned} S_{2^{n+1}-1} &= a_1 + \left(a_2 + a_3\right) + \left(a_4 + a_5\right) + \cdots + \left(a_{2^{n+1}-2} + a_{2^{n+1}-1}\right) \\ &= u + v + \left(a_1 + u + a_1 + v\right) + \left(a_2 + u + a_2 + v\right) + \cdots + \left(a_{2^n-1} + u + a_{2^n-1} + v\right) \\ &= 2^n(u+v) + 2S_{2^n-1}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned} S_{2^n-1} &= 2^{n-1}(u+v) + 2S_{2^{n-1}-1} = 2^{n-1}(u+v) + 2\left(2^{n-2}(u+v) + 2S_{2^{n-2}-1}\right) \\ &= 2 \cdot 2^{n-1}(u+v) + 2^2 S_{2^{n-2}-1} \\ &= \cdots = \left(n-1\right) \cdot 2^{n-1}(u+v) + 2^{n-1}(u+v) \\ &= \left(u+v\right) n \cdot 2^{n-1}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 20 \text{ 分} \end{aligned}$$

设 $u + v = 2^k \cdot q$，其中 k 是非负整数，q 是奇数．取 $n = q \cdot l^2$，其中 l 为满足 $l \equiv k - 1 \pmod 2$ 的任意正整数，此时 $S_{2^n-1} = q^2 l^2 \cdot 2^{k-1+q \cdot l^2}$，注意到 q 是奇数，故

$$k - 1 + q \cdot l^2 \equiv k - 1 + l^2 \equiv k - 1 + (k-1)^2 = k(k-1) \equiv 0 \pmod 2,$$

所以，S_{2^n-1} 是完全平方数．由于 l 有无穷多个，故数列 $\{S_n\}$ 中有无穷多项是完全平方数．　　　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$40 分

三、（本题满分 50 分）一次考试共有 m 道试题，n 个学生参加，其中 $m, n \geq 2$ 为给定的整数．每道题的得分规则是：若该题恰有 x 个学生没有答对，则每个答对该题的学生得 x 分，未答对的学生得零分．每个学生的总分为其 m 道题的得分

总和. 将所有学生总分从高到低排列为 $p_1 \ge p_2 \ge \cdots \ge p_n$，求 p_1+p_n 的最大可能值.

解 对任意的 $k=1,2,\cdots,m$，设第 k 题没有答对者有 x_k 人，则第 k 题答对者有 $n-x_k$ 人，由得分规则知，这 $n-x_k$ 个人在第 k 题均得到 x_k 分. 设 n 个学生的得分之和为 S，则有

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = S = \sum_{k=1}^{m} x_k(n-x_k) = n\sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{k=1}^{m} x_k^2 .$$

因为每一个人在第 k 道题上至多得 x_k 分，故

$$p_1 \le \sum_{k=1}^{m} x_k . \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 10\text{ 分}$$

由于 $p_2 \ge \cdots \ge p_n$，故有 $p_n \le \dfrac{p_2+p_3+\cdots+p_n}{n-1} = \dfrac{S-p_1}{n-1}$. 所以

$$\begin{aligned} p_1+p_n &\le p_1 + \frac{S-p_1}{n-1} = \frac{n-2}{n-1}p_1 + \frac{S}{n-1} \\ &\le \frac{n-2}{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{m} x_k + \frac{1}{n-1}\cdot\left(n\sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{k=1}^{m} x_k^2\right) \\ &= 2\sum_{k=1}^{m} x_k - \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{m} x_k^2 . \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 20\text{ 分} \end{aligned}$$

由柯西不等式得

$$\sum_{k=1}^{m} x_k^2 \ge \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right)^2,$$

于是

$$\begin{aligned} p_1+p_n &\le 2\sum_{k=1}^{m} x_k - \frac{1}{m(n-1)}\cdot\left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right)^2 \\ &= -\frac{1}{m(n-1)}\cdot\left(\sum_{k=1}^{m} x_k - m(n-1)\right)^2 + m(n-1) \\ &\le m(n-1) . \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 40\text{ 分} \end{aligned}$$

另一方面，若有一个学生全部答对，其他 $n-1$ 个学生全部答错，则

$$p_1+p_n = p_1 = \sum_{k=1}^{m}(n-1) = m(n-1) .$$

综上所述，p_1+p_n 的最大值为 $m(n-1)$. ……………………50 分

四、（本题满分 50 分） 设 n, k 为大于 1 的整数，$n<2^k$. 证明：存在 $2k$ 个不被 n 整除的整数，若将它们任意分成两组，则总有一组有若干个数的和被 n 整除.

证明 先考虑 n 为 2 的幂的情形.

设 $n=2^r$, $r\ge 1$，则 $r<k$. 取 3 个 2^{r-1} 及 $2k-3$ 个 1，显然这些数均不被 n 整

除．将这 $2k$ 个数任意分成两组，则总有一组中含 2 个 2^{r-1}，它们的和为 2^r，被 n 整除．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…………………10 分

现在设 n 不是 2 的幂，取 $2k$ 个数为

$$-1,\ -1,\ -2,\ -2^2,\ \cdots,\ -2^{k-2},\ 1,\ 2,\ 2^2,\cdots,2^{k-1},$$

因为 n 不是 2 的幂，故上述 $2k$ 个数均不被 n 整除．　　　　…………………20 分

若可将这些数分成两组，使得每一组中任意若干个数的和均不能被 n 整除．不妨设 1 在第一组，由于 $(-1)+1=0$，被 n 整除，故两个 -1 必须在第二组；因 $(-1)+(-1)+2=0$，被 n 整除，故 2 在第一组，进而推出 -2 在第二组．

现归纳假设 $1,2,\cdots,2^l$ 均在第一组，而 $-1,-1,-2,\cdots,-2^l$ 均在第二组，这里 $1\le l<k-2$，由于 $(-1)+(-1)+(-2)+\cdots+\left(-2^l\right)+2^{l+1}=0$，被 n 整除，故 2^{l+1} 在第一组，从而 -2^{l+1} 在第二组．故由数学归纳法可知，$1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^{k-2}$ 在第一组，$-1,\ -1,\ -2,\ -2^2,\ \cdots,\ -2^{k-2}$ 在第二组．最后，由于

$$(-1)+(-1)+(-2)+\cdots+\left(-2^{k-2}\right)+2^{k-1}=0,$$

被 n 整除，故 2^{k-1} 在第一组．因此 $1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^{k-1}$ 均在第一组，由正整数的二进制表示可知，每一个不超过 2^k-1 的正整数均可表示为 $1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^{k-1}$ 中若干个数的和，特别地，因为 $n\le 2^k-1$，故第一组中有若干个数的和为 n，当然被 n 整除，矛盾！

因此，将前述 $2k$ 个整数任意分成两组，则总有一组中有若干个数之和被 n 整除．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…………………50 分