绝密★考试结束前

2020年普通高等学校招生全国统一考试

数　学

姓名________________　　　　　　　　准考证号________________

本试题卷分选择题和非选择题两部分。全卷共4页，选择题部分1至2页；非选择题部分3至4页。满分150分，考试时间120分钟。

考生注意：

1. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题纸规定的位置上。

2. 答题时，请按照答题纸上“注意事项”的要求，在答题纸相应的位置上规范作答，在本试题卷上的作答一律无效。

参考公式：

如果事件 A, B 互斥，那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A, B 相互独立，那么

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p，那么 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\ (k=0,1,2,\ldots,n)$

台体的体积公式

$V=\frac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)h$

其中 S_1, S_2 分别表示台体的上、下底面积，h 表示台体的高

柱体的体积公式

$V=Sh$

其中 S 表示柱体的底面积，h 表示柱体的高

锥体的体积公式

$V=\frac{1}{3}Sh$

其中 S 表示锥体的底面积，h 表示锥体的高

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

球的体积公式

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

选择题部分（共40分）

一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $P=\{x|1<x<4\}$，，则 $P\cap Q=$

A．$\{x|1<x\le 2\}$　　B．$\{x|2<x<3\}$　　C．$\{x|2<x\le 3\}$　　D．$\{x|1<x<4\}$

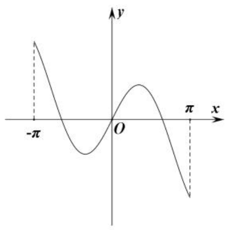
2．已知 $a\in R$，若 $a-1+(a-2)\mathrm{i}$（i 为虚数单位）是实数，则 $a=$

A．1　　B．-1　　C．2　　D．-2

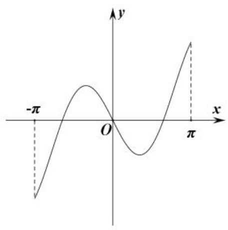
3．若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-3y+1\le 0 \\ x+y-3\ge 0 \end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的取值范围是

A．$(-\infty,4]$　　B．$[4,+\infty)$　　C．$[5,+\infty)$　　D．$(-\infty,+\infty)$

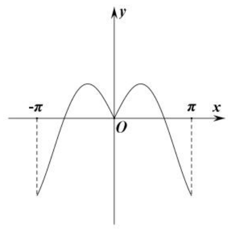
4．函数 $y=x\cos x+\sin x$ 在区间 $[-\pi,+\pi]$ 的图像大致为



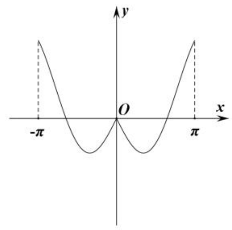
A.



B.



C.

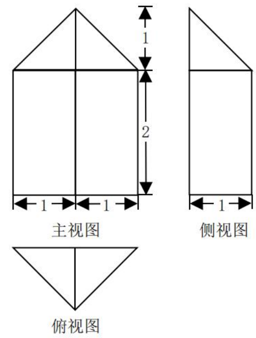


D.

5．某几何体的三视图（单位：cm）如图所示，则该几何体的体积（单位：cm^3）是

A．$\dfrac{7}{3}$　　B．$\dfrac{14}{3}$

C．3　　D．6



6．已知空间中不过同一点的三条直线 m,n,l，则“m,n,l 在同一平面”是“m,n,l 两两相交”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

7．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n，公差 $d\neq 0$，$\dfrac{a_1}{d}\leq 1$.记 $b_1=S_2$，$b_{n+1}=S_{n+2}-S_{2n}$，$n\in N^*$，下列等式不可能成立的是

A．$2a_4=a_2+a_6$　　B．$2b_4=b_2+b_6$　　C．$a_4^2=a_2a_8$　　D．$b_4^2=b_2b_8$

8．已知点 $O(0,0)$，$A(-2,0)$，$B(2,0)$.设点 P 满足 $|PA|-|PB|=2$，且 P 为函数 $y=3\sqrt{4-x^2}$ 图像上的点，则 $|OP|=$

A．$\dfrac{\sqrt{22}}{2}$　　B．$\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$　　C．$\sqrt{7}$　　D．$\sqrt{10}$

9．已知 $a,b\in R$ 且 $ab\neq 0$，若 $(x-a)(x-b)(x-2a-b)\geq 0$ 在 $x\geq 0$ 上恒成立，则

A．$a<0$　　B．$a>0$　　C．$b<0$　　D．$b>0$

10．设集合 S,T，$S\subseteq N^*$，$T\subseteq N^*$，S,T 中至少有两个元素，且 S,T 满足：

①对于任意 $x,y\in S$，若 $x\neq y$，都有 $xy\in T$；

②对于任意 $x,y\in T$，若 $x<y$，则 $\dfrac{y}{x}\in S$；下列命题正确的是

A．若 S 有 4 个元素，则 $S\cup T$ 有 7 个元素

B．若 S 有 4 个元素，则 $S\cup T$ 有 6 个元素

C．若 S 有 3 个元素，则 $S\cup T$ 有 4 个元素

D．若 S 有 3 个元素，则 $S\cup T$ 有 5 个元素

非选择题部分 (共 110 分)

二、填空题：本大题共 7 小题，共 36 分。多空题每小题 6 分；单空题每小题 4 分。

11．已知数列$\{a_n\}$满足$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，则$S_3=$ ▲ .

12．设$(1+2x)^5=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3+a_5x^4+a_6x^5$，则$a_5=$ ▲ ；$a_1+a_2+a_3=$ ▲ .

13．已知$\tan\theta=2$，则$\cos 2\theta=$ ▲ ；$\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=$ ▲ .

14．已知圆锥展开图的侧面积为2π，且为半圆，则底面半径为 ▲ .

15．设直线$l:y=kx+b(k>0)$，圆$C_1:x^2+y^2=1$，$C_2:(x-4)^2+y^2=1$，若直线l与C_1,C_2都相切，则$k=$ ▲ ；$b=$ ▲ .

16．一个盒子里有 1 个红 1 个绿 2 个黄四个相同的球，每次拿一个，不放回，拿出红球即停，设拿出黄球的个数为ξ，则$P(\xi=0)=$ ▲ ；$E(\xi)=$ ▲ .

17．设$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$为单位向量，满足$|2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2|\le\sqrt{2}$，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角为$\theta$，则$\cos^2\theta$的最小值为 ▲ .

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

18．（本题满分 14 分）

在锐角△ABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$2b\sin A=\sqrt{3}a$.

（Ⅰ）求角B；

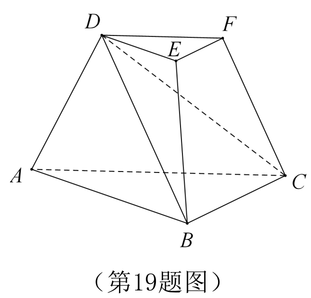
（Ⅱ）求$\cos A+\cos B+\cos C$的取值范围.

19．（本题满分 15 分）

如图，三棱台$DEF-ABC$中，面$ADFC\perp$面ABC，$\angle ACB=\angle ACD=45^\circ$，$DC=2BC$.

（Ⅰ）证明：$EF\perp DB$；

（Ⅱ）求DF与面DBC所成角的正弦值.



（第19题图）

20. （本题满分 15 分）

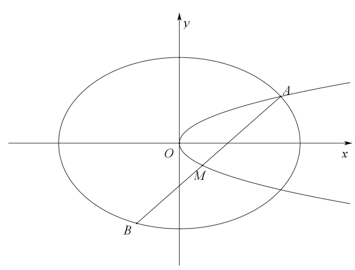
已知数列$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$中，$a_1=b_1=c_1=1$，$c_{n+1}=a_{n+1}-a_n$，$c_{n+1}=\dfrac{b_n}{b_{n+2}}\cdot c_n\left(n\in N^*\right)$.

（Ⅰ）若数列$\{b_n\}$为等比数列，且公比$q>0$，且$b_1+b_2=6b_3$，求q与a_n的通项公式；

（Ⅱ）若数列$\{b_n\}$为等差数列，且公差$d>0$，证明：$c_1+c_2+\cdots+c_n<1+\dfrac{1}{d}$.

21. （本题满分 15 分）

如图，已知椭圆$C_1:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，抛物线$C_2:y^2=2px\left(p>0\right)$，点$A$是椭圆$C_1$与抛物线$C_2$的交点，过点$A$的直线$l$交椭圆$C_1$于点$B$，交抛物线$C_2$于$M$（$B,M$不同于$A$）.



（第21题图）

（Ⅰ）若$p=\dfrac{1}{16}$，求抛物线C_2的焦点坐标；

（Ⅱ）若存在不过原点的直线l使M为线段AB的中点，求p的最大值.

22. （本题满分 15 分）

已知$1<a\le 2$，函数$f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-x-a$，其中$\mathrm{e}=2.71828\cdots$为自然对数的底数.

（Ⅰ）证明：函数$y=f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上有唯一零点；

（Ⅱ）记x_0为函数$y=f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上的零点，证明：

（i）$\sqrt{a-1}\le x_0\le\sqrt{2\left(a-1\right)}$；

（ii）$x_0f\left(\mathrm{e}^{x_0}\right)\ge\left(\mathrm{e}-1\right)\left(a-1\right)a$.